انتشارات تهران

در حل مسأله‌های ریاضی اشتباه نکنیم.

چگونه مسأله‌های ریاضی را حل کنیم؟

پرویز شهریاری

در حلّ

مسأله‌های ریاضی

اشتباه نکنیم

(چگونه مسأله‌های ریاضی را حل کنیم)

پرویز شهریاری

انتشارات تهران

انتشارات تهران

تهران ـ خ پاسداران، چهارراه دولت،

شمارهٔ ۲۶ تلفن: ۲۵۴۵۲۱۹

صندوق پستی ۴۸۷ ـ ۱۹۵۸۵

در حل مسأله‌های ریاضی اشتباه نکنیم

پرویز شهریاری

چاپ اول: ۱۳۷۵

تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

حروفچینی: گنجینه ۶۴۱۴۰۱۴

لیتوگرافی و چاپ: چاپخانهٔ دیبا

شابک ۳ ـ ۱۴ ـ ۵۶۰۹ ـ ۹۶۴ ISBN 964 - 5609 - 14 - 3

فهرست

پیش‌گفتار

ضمن حل مساله‌های ریاضی، مهم این نیست که از عهدهٔ حل برآییم. چه‌بسا با مساله‌ای روبه‌رو شویم که برایمان تازگی داشته باشد و، با توجه به دستورها و قضیه‌هایی که در کتاب‌های درسی دیده‌ایم، در برابر ما تسلیم نشود و تن به حل ندهد. این وضع نباید موجب نگرانی ما بشود. باید روی مساله اندیشید و از جانب‌های مختلف به آن حمله کرد، ولی اگر راه حل آن به دست نیامد و پاسخ پیدا نشد، چیزی را از دست نداده‌ایم. خود اندیشیدن دربارهٔ یک مساله و راه‌های مختلف را آزمودن، به اندیشهٔ ما و به درک ریاضی ما یاری می‌رساند و نیرو می‌بخشد . . . مهم‌تر از حل مساله، درست اندیشیدن و استدلال درست کردن است. باید این توانایی را پیدا کنیم که درست را از نادرست تشخیص دهیم و، اگر مساله‌ای را حل کردیم، به درستی راه حل خود اطمینان داشته باشیم. در واقع، اگر نتوانیم مساله‌ای را حل کنیم، به معنای آن است که امتیازی نیاورده‌ایم؛ ولی اگر مساله‌ای را نادرست حل کنیم، به این معناست که درک ریاضی ما ضعیف است و باید به خودمان امتیاز منفی بدهیم.

برای این‌که، ضمن حل مساله، امتیاز منفی نگیریم، باید بر خود درس مسلط باشیم، قضیه‌ها و دستورها را بشناسیم و تنها از حافظهٔ خود و یا آن‌چه «به نظرتان می‌رسد» اکتفا نکنیم. به تعریف‌ها، قراردادها، قضیه‌ها و دستورها اعتماد کنید، نه به «عقل سلیم». به یاد داشته باشید که بشر، هزاران سال با تکیه بر همین عقل سلیم خود، باور داشت که زمین مسطح است و تمامی جهان هستی، هر شبانه روز یک بار به دور آن می‌چرخد؛ گمان می‌کرد، ستارگان، همچون میخ‌های بلوری بر سطح آسمان کوبیده شده‌اند و گاهی بر انسان‌ها خشم می‌گیرند و گاهی مهربانی خود را به او نشان می‌دهند و . . . بسیاری باورهای دیگر.

در ریاضیات، می‌توان از «عقل سلیم» یاری گرفت، ولی نباید زیر فرمان بی چون و چرای آن بود. آن‌چه بر ریاضیات حاکم است، استدلال و نتیجه‌گیری درست است نه چیز دیگری. هر زمان که توانستید، راه حل درست را از راه حل نادرست تشخیص دهید، یعنی یا مساله را نتوانید حل کنید و یا اگر به حل آن موفق شدید، به درستی آن اطمینان داشته باشید، آن وقت می‌توانید مدعی باشید که **درک ریاضی** پیدا کرده‌اید. درک *ریاضی، یعنی تشخیص راه‌حل‌های نادرست و «استدلال‌های» اشتباه.*

ممکن است شما نتوانید، به راحتی و در زمانی کوتاه، مساله‌ای را که به شما داده‌اند، حل کنید؛ با وجود این، اگر این توانایی را داشته باشید که راه‌حل‌های نادرست دیگران را تشخیص دهید، به معنای آن است که دارای درک ریاضی شده‌اید. درک ریاضی، مهم‌تر و با ارزش‌تر از حل مساله است.

□

وقتی می‌خواهید مساله‌ای ریاضی را حل کنید، به این نکته‌ها توجه داشته باشید:

۱) آیا بر درس‌هایی که به این مساله مربوط می‌شوند، تسلط دارید؟ آیا آن‌ها را، به صورتی عمقی فهمیده‌اید؟ اگر در این باره تردید دارد، پیش از حل مساله، به درس‌های مربوط به آن (تعریف‌ها، قضیه‌ها و دستورها) مراجعه کنید و اگر لازم است، آن‌ها را به خوبی فرا بگیرید.

۲) آیا صورت مساله را درست فهمیده‌اید؟ چه چیزهایی به شما داده و چه چیزهایی از شما خواسته است؟ اگر لازم است، یک بار و یا حتا چند بار دیگر، صورت مساله را مرور کنید.

۳) آیا هیچ رابطه‌ای بین داده‌ها و خواسته‌های مساله می‌بینید؟ آیا باید واسطه‌هایی پیدا کرد تا حلقهٔ ارتباطی بین فرض و حکم را کشف کنید؟ . . . این حلقه‌های واسطه‌ای و ارتباطی کدام‌اند؟

۴) آیا مساله‌ای شبیه یا نزدیک به این مساله، پیش از این حل کرده‌اید یا جایی دیده‌اید؟ اگر چنین است، پیش از حل مساله، سراغی از آن مساله یا مساله‌های مشابه بگیرید و راه‌حل آن‌ها را، به طور کامل بررسی کنید. چه‌بسا، همان روش‌های حل، برای مسالهٔ شما هم به کار آیند!

۵) اگر با همهٔ این‌ها، باز هم درِ مساله گشوده نشد، مساله را برای خود، ساده‌تر کنید، به سراغ حالت‌های خاص و ساده‌تر بروید. آیا می‌توانید این حالت یا حالت‌های خاصِ ساده را حل کنید؟ اگر مساله‌ای مربوط به یک مثلث غیر مشخص است، ببینید، در حالت مثلثی که سه ضلع برابر، یا دو ضلع برابر دارد، به چه صورتی درمی‌آید؟ در مثلث با زاویهٔ ۹۰ درجه، چه وضعی پیدا می‌کند؟ یا اگر می‌خواهید، دستوری را دربارهٔ تابع با ضابطهٔ کلی $f(x)$ پیدا کنید، در آغاز ببینید، در حالت‌های ساده‌تر تابع خطی (با ضریب‌های عددی) با تابع درجه دوم (باز هم با ضریب‌های عددی) چگونه می‌شود و چه راه‌حلی دارد! به طور کلی: *اگر نمی‌توانید مساله‌ای را حل کنید، اول به سراغ حل مساله‌ای بروید که از مسالهٔ شما ساده‌تر است* (و به احتمالی، هنوز راه حل آن را نمی‌دانید). اغلب، حل یک مساله، در

حالت‌های خاص و ساده‌تر خود، می‌تواند راهنمای حل آن، در حالت کلی باشد.

۶) اگر مساله‌ای راحل کردید، آن را کنار نگذارید و تلاش کنید به این پرسش‌ها، پاسخ دهید:

آیا این، تنها راه حل مساله است؟

آیا این، زیباترین و بهترین راه حل است؟

آیا عکس مساله، وقتی که جای فرض و حکم عوض شود، قابل حل است؟

آیا می‌توان بخشی از فرض را به حکم و بخشی از حکم را به فرض تبدیل کرد؟

آیا مساله، حالت خاص دارد؟ این حالت‌ها کدام‌اند؟

آیا مساله، حالت کلی، یا نسبت به مسالهٔ شما کلی‌تر، دارد؟ و آیا این مسالهٔ کلی قابل حل است؟ . . .

باز تاکید می‌کنم، جست و جوی راه حل و بررسی جانب‌های مختلف یک مسالهٔ ریاضی، از نظر پیشرفت شما، اهمیت بیشتری دارد تا خود حل مساله.

۷) و آخرین سفارش: هرگز با برخورد به یک سماله، به راه حل آن (در کتاب‌های حل مساله) مراجعه نکنید و یا راه حل آن را از دیگری نپرسید. کوشش کنید خودتان راهی برای حل آن پیدا کنید و تنها وقتی به حل کتاب مراجعه کنید و یا از دیگران بپرسید که بخواهید راه حل خود را با راه حل آن‌ها مقایسه کنید.

همیشه به یاد داشته باشید: *اگر چند روز روی یک مساله بیندیشید و نتوانید آن را حل کنید، برای شما و اندیشهٔ ریاضی شما سودمندتر از آن است که در یک روز، راه حل ده مساله را از روی کتاب ببینید و یا از دیگران کمک بگیرید.*

□

در بخش اول این کتاب، به برخی از اشتباه‌ها اشاره شده است که گریبان‌گیر برخی از دانش‌آموزان است و آن‌ها را از راه و روش درست بازمی‌دارد. در این‌جا، بیشتر به جبر مقدماتی و مثلثات (آن هم به ساده‌ترین آن‌ها) پرداخته‌ایم و، امید داریم، در کتاب‌های بعدی، به شاخه‌های دیگر ریاضیات دبیرستانی هم، بپردازیم.

در بخش دوم، کتاب کوچکی را آورده‌ایم که تجربه‌های یک معلم ریاضی را در اختیار شما می‌گذارد.در این بخش، ضمن حل برخی مساله‌ها، از تاریخ ریاضیات و از تجربهٔ کار برخی ریاضی‌دانان هم برای شما صحبت می‌کند و سفارش‌های سودمندی برای پدید آمدن خلاقیت ریاضی، برای شما دارد.

بخش اول

مراقب باشید اشتباه نکنید

۱. جبر

در آغاز، در جدول داده شده، اشتباه‌های عمده‌ای که ممکن است، ضمن عمل، در ریاضیات محاسبه‌ای پیش آید، آورده‌ایم. در ستون سمت راست، نتیجهٔ محاسبه اشتباه و، در ستون سمت چپ، نتیجهٔ درست داده شده است. این‌ها، عادی‌ترین و ساده‌ترین اشتباه‌هایی است که در کارهای برخی از دانش‌آموزان (و ازجمله، در ورقه‌های امتحانی آن‌ها) دیده می‌شود. دربارهٔ هرکدام از آن‌ها، با دقت بیندیشید و به این پرسش‌ها پاسخ دهید:

ـ اشتباه در کجاست؟

ـ آیا این اشتباه، مربوط به عدم درک یک مفهوم ریاضی است یا مربوط به ندانستن شیوه‌های عمل؟

ـ آیا تاکنون گرفتار چنین اشتباهی شده‌اید؟

ـ آیا می‌توانید، نمونه‌های مشابهی را مثال بزنید؟

ـ آیا اشتباه یا اشتباه‌هایی از گونه‌های دیگر را می‌شناسید؟ نمونه بیاورید.

نتیجهٔ نادرست	نتیجهٔ درست
$\frac{6x^2}{2x^2+3x} = 3+2x$	$\frac{6x^2}{2x^2+3x} = \frac{6x}{2x+3}$
$a - \frac{c-d}{2} = \frac{2a-c-d}{2}$	$a - \frac{c-d}{2} = \frac{2a-c+d}{2}$
$(1-x)^3 = (1-x)(1+x+x^2)$	$(1-x)^3 - 1 - 3x + 3x^2 - x^3$
$(x^{\sqrt{5}})^2 = x^5$	$(x^{\sqrt{5}})^2 = x^{2\sqrt{5}}$
$x^{2a} + x^{2b} = x^2(x^a + x^b)$	$\begin{cases} x^{2a} + x^{2b} = x^{2b}(x^{2a-2b}+1) \\ \text{با شرط } a > b \\ x^{2a} + x^{2b} = x^{2a}(1 + x^{2b-2a}) \\ \text{با شرط } a < b \end{cases}$
$(9^{\sqrt{x}})^2 = 9^{2+\sqrt{x}}$	$(9^{\sqrt{x}})^2 = 9^{2\sqrt{x}}$
$\frac{4^x}{2^x} = 2$	$\frac{4^x}{2^x} = 2^x$
$2^x + 4^x = 6^x$	$2^x + 4^x = 2^x + 2^{2x} = 2^x(1+2^x)$
$4 \times 2^x = 8^x$	$4 \times 2^x = 2^2 \times 2^x = 2^{x+2}$
$a^{-\frac{1}{3}} = a^3$	$a^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}$
$\frac{1}{a^{-2}b^2 - 1} = \frac{a^2}{b^2-1}$	$\frac{1}{a^{-2}b^2 - 1} = \frac{1}{\frac{b^2}{a^2} - 1} = \frac{a^2}{b^2 - a^2}$
چون $\sqrt[3]{x} = 2$ پس $x = \sqrt[3]{2}$	چون $\sqrt[3]{x} = 2$ پس $x = 2^3 = 8$
$2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{2x}}$	$2x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{x}}$
$(\sqrt[3]{x^3-8})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[\frac{3}{2}]{x^3-8}$	$(\sqrt[3]{x^3-8})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[6]{x^3-8}$
معادلهٔ $\sqrt{x^2} - x = 2$ جواب ندارد	$\sqrt{x^2} - x = 2 \Rightarrow x = -2$
$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[4]{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{1+x^2}}$	$\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt[4]{1+x^2}} = \frac{\sqrt[4]{(1+x^2)^2}}{\sqrt[4]{1+x^2}} = \sqrt[4]{1+x^2}$
$2^{3^2} = 8^2 = 64$	$2^{3^2} = 2^9 = 512$
$\sqrt{-x^2} = -\sqrt{x^2} = -x$	$\sqrt{-x^2} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{-1} = \|x\|\sqrt{-1}$
$\log_a^2 x = 2\log_a x$	$\log_a^2 x = (\log_a x)^2$

این‌ها، همهٔ اشتباه‌های ممکن نیست. خودتان هم می‌توانید، جدول را ادامه دهید.

اکنون با ذکر نمونه‌هایی (که بیشتر از ورقه‌های امتحانی برداشته شده است)، به بررسی برخی اشتباه‌ها، که ممکن است در محاسبه‌های جبری پیش آید، می‌پردازیم.

۱. ردیف عمل‌ها را، ضمن ساده کردن یک عبارت، رعایت کنید.

دانش‌آموزی برای ساده کردن عبارت

$$۱ - \frac{\sqrt{x}}{x-۱} : \frac{\sqrt{x}-۱}{x} \quad (x > ۰)$$

به این ترتیب، عمل کرده است:

$$۱ - \frac{\sqrt{x}}{x-۱} = \frac{x-\sqrt{x}-۱}{x-۱};$$
$$\frac{x-\sqrt{x}-۱}{x-۱} : \frac{\sqrt{x}-۱}{x} = \cdots$$

دانش آموز فراموش کرده است که عمل‌های مرتبهٔ بالاتر (در این‌جا، تقسیم)، باید قبل از عمل‌های مرتبهٔ پایین‌تر (در این‌جا، تفریق) انجام شود. در این مثال، باید عمل تفریق را بعد از عمل تقسیم انجام داد.

در عمل‌های جبری، توان و ریشهٔ مقدم بر ضرب و تقسیم، و ضرب و تقسیم مقدم بر جمع و تفریق‌اند. در حالتی که عبارت، شامل پرانتز باشد، عمل‌های داخل پرانتز، مقدم بر عمل‌های بیرون از پرانتزند. در ضمن، به یاد داشته باشید که، کسر، کار پرانتز را به عهده دارد: برای این که عددی یا جمله‌ای در یک کسر ضرب شود، باید در تمام جمله‌های صورت کسر ضرب شود؛ اگر جلو یک کسر، نشانهٔ منفی وجود داشته باشد، همهٔ جمله‌های صورت کسر را تغییر علامت می‌دهد.

اکنون، در دو نمونهٔ زیر، اشتباه عمل‌ها را پیدا کنید:

$$۱)\ (\sqrt{x}+\sqrt{x-a^۲})(\sqrt{x}-\sqrt{x-a^۲}) = x-(x-a^۲) = -a^۲;$$

$$۲)\ ۱ - \frac{a^۲ + b^۲}{۲ab} = \frac{۲ab - a^۲ + b^۲}{۲ab}$$

۲. مواظب باشید. از آن‌جا که، ضمن حل معادله‌های کسری، بعد از آن که کسرها، به یک مخرج تبدیل شوند، به دلیل برابری مخرج‌ها در دو طرف معادله، از آن‌ها صرف‌نظر می‌کنند، پیش آمده است که دانش‌آموز، ضمن جمع جبری دو کسر، مخرج را کنار می‌گذارد و، به عنوان نمونه، می‌نویسد:

$$\frac{۳}{۲a^۲b} + \frac{۴}{a^۳b^۳} = ۳ab^۲ + ۸$$

در ضمن، در حل معادله‌های کسری هم، باید به این نکته توجه داشت که، حذف مخرج‌های برابر، از دو طرف معادله، به این شرط ممکن است که برابر صفر نباشد، زیرا تقسیم بر صفر معنا ندارد. به این معادله توجه کنید:

$$\frac{x - ۳}{x - ۵} - \frac{۱}{x} = \frac{۲}{x - ۵}$$

اگر دو طرف معادله را در نظر بگیریم، مخرج مشترک کسرها، چنین است:

$$x(x - ۵)$$

یعنی، با ضرب دو طرف برابری در $x(x - ۵)$، مخرج‌ها از بین می‌روند و معادله، به این صورت درمی‌آید:

$$x(x - ۳) - (x - ۵) = ۲x$$

که بعد از ساده کردن، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$x^۲ - ۶x + ۵ = ۰$$

این معادله دو ریشه دارد: $x_1 = ۱$ و $x_2 = ۵$. آیا هر دو ریشه را باید پذیرفت؟

ضمن حل، دو طرف معادله را در $x(x-۵)$ ضرب کردیم؛ می‌دانیم دو طرف برابری را نمی‌توان در صفر ضرب کرد، بنابراین x نمی‌تواند برابر صفر یا ۵ باشد. ریشهٔ $x_2 = ۵$ را نمی‌توان پذیرفت. معادلهٔ ما، تنها یک ریشه دارد: $x = ۱$.

اکنون روشن کنید، آیا جواب‌ها، ریشه‌های معادله‌اند:

$$۱)\ \frac{۲x-۳}{x-۵} - \frac{۱}{x} = \frac{x+۲}{x-۵} \Rightarrow x_1 = ۱,\ x_2 = ۵$$

$$۲)\ \frac{x}{x^۲-۱} = \frac{۱}{x+۱} - \frac{۱}{۲x} \Rightarrow x = -۱$$

معادله‌ها را حل کنید و ببینید ریشهٔ غیر قابل قبول کدام است و چرا!

۳. قانون‌های عمل را دربارهٔ ضرب، تقسیم و توان، رعایت کنید. در این‌جا، چند نمونه آمده است که، با نقض قانون‌های عمل و یا درست نفهمیدن آن‌ها، جواب‌های نادرست به دست آمده است. اشتباه در کجاست؟ جواب درست کدام است؟

$$۱)\ \left(a^{\frac{۱}{۲}} + b^{\frac{۱}{۲}}\right)^{-۳} = \frac{۱}{a^{\frac{۳}{۲}} + b^{\frac{۳}{۲}}};$$

$$۲)\ \frac{a^۳ - b^۳}{a-b} = a^۲ - b^۲;$$

$$۳)\ m^{\frac{۱}{۲}} - n^{\frac{۱}{۲}} = (m-n)^{\frac{۱}{۲}};$$

$$۴)\ a^{-۱} + b^{-۱} = \frac{۱}{a+b};$$

$$۵)\ (a^۲)^{-\frac{۱}{۵}} = \frac{۱}{(a^۲)^۵};$$

$$۶)\ m^{-\frac{۲}{۳}} = m^{\frac{۳}{۲}};$$

$$۷)\ (-b^{\frac{۱}{۴}})^{-۴} = -b;$$

$$۸)\ ۵^{۴x} - ۵^{۲x} + ۵ = ۴x - ۲x + ۱;$$

$$۹)\ ۱۶^{۲} - ۴^{۲} = ۴^{۲}(۴^{۲} - ۱);$$

$$۱۰)\ ۹^{۲-x} = ۹^{۲} - ۹^{x}$$

۴. در عملِ با رادیکال‌ها اشتباه نکنید. حاصل ضرب و یا خارج قسمت رادیکال‌ها را، تنها وقتی می‌توان، با ضرب یا تقسیم مقدارهای زیر رادیکال‌ها به دست آورد که دارای فرجه‌های برابر باشند. در عمل‌های زیر، اشتباه را پیدا کنید و پاسخ درست را به دست آورید:

$$۱)\ \sqrt[۴]{a^{۳}} \cdot \sqrt[۳]{۴b} = \sqrt[۷]{۴a^{۳}b};$$

$$۲)\ \sqrt[۴]{a^{۳}} \cdot \sqrt[۳]{۴b} = \sqrt[۱۲]{۴a^{۳}b};$$

$$۳)\ \frac{\sqrt[۶]{(x-a)^{۴}}}{\sqrt{x-a}} = ۱$$

۵. در یک عبارت کسری، نمی‌توان صورت و مخرج را به توان رساند، یا از صورت و مخرج ریشه گرفت. صورت و مخرج یک کسر را می‌توان در عددی مخالف صفر ضرب یا بر عددی مخالف صفر تقسیم کرد. وقتی به عنوان مثال، در کسر $\frac{۳}{۴}$، صورت و مخرج را به توان ۲ برسانیم، در واقع، صورت را در ۳ و مخرج را در ۴ ضرب کرده‌ایم که، البته، مقدار کسر را تغییر می‌دهد. در دو نمونهٔ زیر، اشتباه عمل را پیدا کنید:

$$۱)\ \frac{۲a\sqrt{a^{۳} - b^{۳}}}{a^{۳} - b^{۳}} = \frac{۴a^{۲}(a^{۳} - b^{۳})}{(a^{۳} - b^{۳})^{۲}} = \frac{۴a^{۲}}{a^{۳} - b^{۳}};$$

$$۲)\ \frac{(a-b)^{۳}}{\left(a^{\frac{۱}{۳}} + b^{\frac{۱}{۳}}\right)^{۳}} = \frac{a-b}{a^{\frac{۱}{۳}} + b^{\frac{۱}{۳}}}$$

۶. مواظب ساده کردن کسرها باشید. به این نمونه‌ها، که اشتباه حل شده‌اند، توجه کنید:

$$۱)\ \frac{۲m+۲(m+n)^۳}{(m+n)^۲(۲m+n)}=\frac{۲m+۲(m+n)}{۲m+n}$$

در این نمونه، یک جمله از دو جملهٔ صورت، با عاملی از مخرج ساده شده است، در حالی که جملهٔ $۲m$ در صورت کسر، نمی‌تواند به این عامل ساده شود. باید هم صورت و هم مخرج کسر، به ضرب عامل‌ها تبدیل شده باشند تا بتوان صورت و مخرج را به آن عامل ساده، یعنی بر آن عامل تقسیم کرد که، البته، این عامل، باید مخالف صفر هم باشد؛ به این عمل نادرست توجه کنید:

$$۲)\ \frac{a-b}{\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b}}=\frac{\sqrt[۴]{a^۴}-\sqrt[۴]{b^۴}}{\sqrt[۴]{a}-\sqrt[۴]{b}}=\sqrt[۴]{a^۳}-\sqrt[۴]{b^۳}$$

نمی‌توان تک‌تک جمله‌های صورت را بر جمله‌های نظیر خود در مخرج، تقسیم کرد. پاسخ درست این کسر را پیدا کنید؛

$$۳)\ \frac{\sqrt{a^۳b}(a\sqrt{a}+b\sqrt{b})}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}=a\sqrt{ab}(a+b)$$

کسر را نمی‌توان به $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ (به ترتیبی که در این‌جا آمده) ساده کرد. پاسخ درست را پیدا کنید.

۷. پیش از تبدیل به یک مخرج، کسرها را ساده کنید. ساده کردن کسرها، پیش از تبدیل آن‌ها به یک مخرج، می‌تواند به ساده‌تر شدن عمل‌ها کمک کند. به این چند نمونه توجه کنید:

$$۱)\ \frac{a+\sqrt[۳]{a^۲x}}{x+\sqrt[۳]{ax^۲}}-۱=\frac{a+\sqrt[۳]{a^۲x}-x-\sqrt[۳]{ax^۲}}{x+\sqrt[۳]{ax^۲}}=\dots$$

ولی اگر، پیش از مخرج مشترک گرفتن، کسر را ساده کنیم:

$$\frac{a+\sqrt[۳]{a^۲x}}{x+\sqrt[۳]{ax^۲}}=\frac{\sqrt[۳]{a^۲}(\sqrt[۳]{a}+\sqrt[۳]{x})}{\sqrt[۳]{x^۲}(\sqrt[۳]{x}+\sqrt[۳]{a})}=\frac{\sqrt[۳]{a^۲}}{\sqrt[۳]{x^۲}}$$

ادامهٔ محاسبه، ساده‌تر می‌شود.

$$۲)\ \frac{a^۲-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[۳]{b}}+a\sqrt[۳]{b}=\frac{a^۲-b\sqrt{a}+a\sqrt{a}\sqrt[۳]{b}-a\sqrt[۳]{b^۲}}{\sqrt{a}+\sqrt[۳]{b}}=\dots$$

ولی صورت و مخرج کسر به $(\sqrt{a}-\sqrt[۳]{b})$ ساده می‌شود:

$$\frac{a^۲-b\sqrt{a}}{\sqrt{a}-\sqrt[۳]{b}}=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a^۳}-\sqrt[۳]{b^۳})}{\sqrt{a}-\sqrt[۳]{b}}=$$

$$=\frac{\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt[۳]{b})(a+\sqrt{a}\sqrt[۳]{b}+\sqrt[۳]{b^۲})}{\sqrt{a}-\sqrt[۳]{b}}$$

که ادامهٔ آن روشن است (در این تمرین، فرض بر نامنفی بودن a است).

$$۳)\ \frac{۳}{x-۲}-\frac{x^{\frac{۱}{۲}}}{x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}}}=\frac{۳(x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}})-x^{\frac{۱}{۲}}(x-۲)}{(x-۲)(x^{\frac{۳}{۲}}-x^{\frac{۱}{۲}})}=\dots$$

(صورت و مخرج کسر دوم، بر $x^{\frac{۱}{۲}}$ بخش‌پذیر است).

$$۴)\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}-\frac{a}{x-a}=\frac{\sqrt{x}(x-a)-a(\sqrt{x}-\sqrt{a})}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(x-a)}=\dots$$

اگر مخرج کسر دوم را تجزیه کنیم:

$$x-a=(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$$

متوجه می‌شویم که، کوچکترین مضرب مشترک مخرج‌ها، همان $x-a$ است.

۸. وقتی عبارتی با جمله‌های مجذور کامل (یا مکعب کامل) در زیر رادیکال باشد، نمی‌توان جمله‌ها را، جدا جدا از رادیکال آزاد کرد. این چند نمونه را، که اشتباه حل شده است، در نظر بگیرید. این رادیکال‌ها را نمی‌توان ساده کرد:

$$۱)\ \sqrt{۹x^۴ - ۲۵} = ۳x^۲ - ۵;$$
$$۲)\ \sqrt{x^۴ + ۱۶x^۲y^۲ + y^۴} = x^۲ + ۴xy + y^۲;$$
$$۳)\ \sqrt[۳]{a^۳ - ۲b^۲} + \sqrt[۳]{۲b^۲} = \sqrt[۳]{a^۳ - ۲b^۲ + ۲b^۲} = \sqrt[۳]{a^۳} = a$$

۹. درک سطحی از مقدار قدر مطلق و ریشهٔ حسابی عددها، می‌تواند منجر به نتیجهٔ نادرست شود. آیا این نمونه‌ها، درست حل شده‌اند؟ پاسخ درست را پیدا کنید.

$$۱)\ \sqrt{(۴ - \sqrt{۳۲})^۲} = ۴ - \sqrt{۳۲} = ۴(۱ - \sqrt{۲})$$

(حاصل رادیکالی که فرجهٔ زوج داشته باشد، همیشه مثبت است، در این‌جا، حاصل رادیکال را منفی نوشته‌ایم.)

$$۲)\ \sqrt{\frac{(m+n)^۲}{(m-n)^۲}} = \frac{m+n}{m-n}$$

(این پاسخ برای حالتی است که قدر مطلق m از قدر مطلق n بیشتر باشد. بگویید چرا؟ مثال عددی پیدا کنید.)

$$۳)\ \sqrt{\frac{k+۱}{(k-۱)^۲}} = \frac{\sqrt{k+۱}}{k-۱}$$

(پاسخ، برای حالت $k < ۱$ درست نیست.)

تعریف ۱. قدر مطلق عدد حقیقی a، عبارت است از عددی حقیقی و نامنفی که با شرط زیر بسازد:

$$|a| = \begin{cases} a & (a > \circ) \\ \circ & (a = \circ) \\ -a & (a < \circ) \end{cases}$$

از تعریف قدر مطلق نتیجه می‌شود: $a \leq |a|$.

ریشهٔ حسابی عددهای حقیقی، بستگی کاملی به مفهوم قدر مطلق دارد.

تعریف ۲. *ریشهٔ $(۲n)$ام یک عدد نامنفی، عددی نامنفی است:*

$$۱)\ \sqrt[۴]{(-۹)^۲} = \sqrt[۴]{۸۱} = ۹$$

$$۲)\ \sqrt{a^۲} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq \circ) \\ -a & (a < \circ) \end{cases}$$

$$۳)\ \frac{\sqrt{(a-b)^۲}}{a-b} = \frac{|a-b|}{a-b} = \begin{cases} ۱ & (a > b) \\ -۱ & (a < b) \end{cases}$$

(حالت $a = b$ ممکن نیست، زیرا مخرج نمی‌تواند برابر صفر باشد.)

$$۴)\ \sqrt{x^۶} = |x^۳| = \begin{cases} x^۳ & (x \geq \circ) \\ -x^۳ & (x < \circ) \end{cases}$$

یادآوری می‌کنیم، همهٔ قانون‌های عمل روی رادیکال‌ها که در دبیرستان خوانده‌ایم، باید با توجه به ریشهٔ حسابی عددها در نظر گرفته شود. درضمن، روشن است، در حالتی که فرجهٔ رادیکال عددی فرد باشد، مُشکلی پیش نمی‌آید:

$$۱)\ \sqrt[۵]{-۳۲} = -۲;\ \ \sqrt[۳]{۱۲۵} = ۵$$

برای وارد کردن ضریب رادیکال (وقتی فرجهٔ آن عددی زوج است) به زیر رادیکال، باید متوجه تعریف ریشهٔ حسابی بود. ضریب منفی را نمی‌توان

زیر رادیکالِ با فرجهٔ زوج بُرد؛ نمی‌توان نوشت:

$$-۴\sqrt{۵} = \sqrt{۵(-۴)^۲} = \sqrt{۸۰}$$

همچنین نمی‌توان به این گونه تبدیل کرد:

$$\sqrt[۳]{\sqrt{۵} - \sqrt{۱۱}} = \sqrt[۶]{(\sqrt{۵} - \sqrt{۱۱})^۲} =$$
$$= \sqrt[۶]{(\sqrt{۱۱} - \sqrt{۵})^۲} = \sqrt[۳]{\sqrt{۱۱} - \sqrt{۵}}$$

برابری $\sqrt[۶]{a^۲} = \sqrt[۳]{a}$، تنها وقتی درست است که داشته باشیم $a \geq ۰$. برای $a < ۰$، باید نوشت: $\sqrt[۶]{a^۲} = \sqrt[۳]{-a}$ و در حالتی که از علامت a اطلاعی نداریم: $\sqrt[۶]{a^۲} = \sqrt[۳]{|a|}$.

۱۰. دامنهٔ معادله، یعنی مقدارهایی را که مجهول می‌تواند بپذیرد، از یاد نبرید. البته، در حل معادله‌ها، بهترین روش آزمایش جواب‌هاست؛ در آزمایش جواب‌ها، به سادگی جواب‌های اضافی، که در معادله صدق نمی‌کنند، معلوم می‌شوند. ولی گاهی، توجه به دامنهٔ مجهول، می‌تواند کار را ساده‌تر کند. به این معادله توجه کنید:

$$\lg(x - ۵) - \lg(۳ - ۲x) = ۱$$

معادله را به این ترتیب حل می‌کنیم

$$\lg\frac{x - ۵}{۳ - ۲x} = ۱;\ \frac{x - ۵}{۳ - ۲x} = ۱۰;$$
$$x - ۵ = ۳۰ - ۲۰x;\ x = \frac{۵}{۳}$$

و اگر جواب را آزمایش کنیم، به دست می‌آید:

$$\lg\left(-\frac{۱۰}{۳}\right) - \lg\left(-\frac{۱}{۳}\right) = ۱$$

که معنا ندارد (لگاریتم عدد منفی، در مجموعهٔ عددهای حقیقی، بی معنی است). ولی اگر دامنهٔ تغییر x را معین می‌کردیم:

$$\begin{cases} x - ۵ > ۰ \\ ۳ - ۲x > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۵ \\ x < \frac{۳}{۲} \end{cases}$$

از همان آغاز می‌فهمیدیم که معادله جواب ندارد (زیرا x نمی‌تواند، در همان حال که از ۵ بزرگتر است، از $\frac{۳}{۲}$ کوچکتر باشد).

یادداشت مهم. به‌ویژه در معادله‌های گنگ، محاسبهٔ دامنهٔ متغیر، به تنهایی نمی‌تواند روشن کند، جواب حاصل، واقعی است یا اضافی. به این معادله توجه کنید:

$$\sqrt{x + ۱} + \sqrt{x - ۲} = ۱$$

در این معادله، دامنهٔ متغیر چنین است: $x \geq ۲$.

برای حل دو طرف معادله را مجذور می‌کنیم:

$$۲x - ۱ + ۲\sqrt{x^۲ - x - ۲} = ۱;$$
$$\sqrt{x^۲ - x - ۲} = ۱ - x; \qquad (*)$$

که اگر دوباره دو طرف معادله را مجذور کنیم:

$$x^۲ - x - ۲ = x^۲ - ۲x + ۱ \Rightarrow x = ۳$$

۳ از ۲ بزرگتر است و، بنابراین در دامنهٔ متغیر قرار دارد، ولی جواب معادله نیست. آزمایش می‌کنیم:

$$\sqrt{۳ + ۱} + \sqrt{۳ - ۲} = ۱ \text{ یا } ۲ + ۱ = ۱?$$

$x = ۳$، در معادله صدق نمی‌کند. این معادله جواب ندارد.

ضمن حل معادله، به معادله $(*)$ رسیدیم. می‌توانستیم همین‌جا توقف کنیم و نتیجه بگیریم، معادله پاسخ ندارد، زیرا در این معادله، سمت چپ برابری مقداری نامنفی است و برای این‌که مقدار سمت راست برابری نامنفی باشد، باید داشته باشیم $x \leq ۱$. ولی $x \leq ۱$ با دامنهٔ معادله، یعنی $x \geq ۲$ سازگار نیست.

در معادله‌های گنگ، به‌ویژه وقتی با فرجهٔ زوج سروکار داریم، همیشه باید جواب‌ها را مورد آزمایش قرار داد.

۱۱. معادله را به طور کامل حل کنید. تعداد ریشه‌های هر معادله، برابر است با بزرگترین درجهٔ مجهول: معادلهٔ درجه دوم دو جواب، معادلهٔ درجه سوم سه جواب و، به طول کلی، معادلهٔ درجه nام، n جواب دارد. ولی این جواب‌ها ممکن است، برخی موهومی باشند و یا چند جواب با هم برابر باشند. همیشه بهتر است، معادله را با روشی حل کنیم که همهٔ جواب‌های آن مشخص شود. به جای این‌که معادلهٔ $x^۳ = ۸$ را، با کعب گرفتن از دو طرف، به برابری $x = ۲$ منجر کنید، آن را این‌طور حل کنید:

$$x^۳ - ۸ = ۰ \Rightarrow (x - ۲)(x^۲ + ۲x + ۴) = ۰$$

از $x - ۲ = ۰$ به دست‌می‌آید $x = ۲$ ومعادلهٔدرجه‌دوم $x^۲ + ۲x + ۴ = ۰$، دو ریشهٔ موهومی دارد.

یا در معادلهٔ $x^۴ = ۸۱$، به جای این که بنویسیم

$$x = \pm\sqrt[۴]{۸۱} = \pm ۳$$

بهتر است، با تجزیه روشن کنیم که، این معادله، چهار جواب دارد (دو جواب حقیقی و دو جواب موهومی):

$$x^۴ - ۸۱ = ۰;\ (x^۲ - ۹)(x^۲ + ۹) = ۰;$$

از $x^۲ - ۹ = ۰$ دو جواب حقیقی $x = \pm ۳$ به دست می‌آید و معادلهٔ $x^۲ + ۹ = ۰$، دو ریشهٔ موهومی دارد.

۱۲. تنها وقتی حاصل ضربی می‌تواند برابر صفر باشد، که دست‌کم، یکی از عامل‌ها برابر صفر باشد. از برابری $a \cdot b = ۰$ می‌توان نتیجه گرفت که، دست‌کم، یکی از دو عامل a یا b باید برابر صفر باشد. ولی پیش آمده است که، دانش‌آموز، این قاعده را، به اشتباه، برای حالت $ab = ۱$ هم به کار برده است و، مثلاً، معادلهٔ $x^۳ + ۱ = ۰$ را این طور حل کرده است:

$$(x + ۱)(x^۲ - x + ۱) = ۱$$

و نتیجه گرفته است که یا $x + ۱ = ۱$ یا $x^۲ - x + ۱ = ۱$ و ... نادرست بودن این نتیجه‌گیری روشن است.

۱۳. عدم دقت، موجب اشتباه می‌شود. به حل این معادله توجه کنید. معادله، اشتباه حل شده است. اشتباه را و دلیل این اشتباه را خودتان پیدا کنید.

$$۵(x - ۳)^{\frac{۱}{۲}} - ۶ = (x - ۳)^{\frac{۱}{۲}}$$

فرض می‌کنیم $z = (x - ۳)^{\frac{۱}{۲}}$؛ معادله چنین می‌شود:

$$۵z^۲ - z - ۶ = ۰ \Rightarrow x_۱ = -۱,\ x_۲ = \frac{۶}{۵}$$

۱۴. اشتباهی که به فراوانی دیده می‌شود: دو طرف معادله را بر عبارتی که می‌تواند برابر صفر شود، تقسیم نکنید. به حل این معادله توجه کنید:

$$۳^x(x^۲ - ۲x - ۳) = ۹(x^۲ - ۲x - ۳)$$

از دو طرف معادله، $x^۲ - ۲x - ۳$ را حذف می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$۳^x = ۹ = ۳^۲ \Rightarrow x = ۲$$

در حالی که معادله سه جواب دارد:

$$۳^x(x^۲ - ۲x - ۳) - ۹(x^۲ - ۲x - ۳) = ۰;$$
$$(x^۲ - ۲x - ۳)(۳^x - ۹) = ۰$$
$$\text{الف)}\ x^۲ - ۲x - ۳ = ۰ \Rightarrow x_۱ = -۱,\ x_۲ = ۳;$$
$$\text{ب)}\ ۳^x = ۹ = ۳^۲ \Rightarrow x_۳ = ۲$$

۱۵. در تبدیل معادله، متوجه تغییر دامنهٔ مجهول باشید. به حل این معادله توجه کنید:

$$\lg x^۲ = \lg ۸۱;\ \lg x^۲ = \lg ۹^۲;$$
$$۲\lg x = ۲\lg ۹;\ \lg x = \lg ۹;\ x = ۹$$

راه حل درست نیست، زیرا در معادله $\lg x^۲ = \lg ۸۱$، x می‌تواند هر عدد حقیقی به‌جز $x = ۰$ باشد، ولی در معادلهٔ $\lg x = \lg ۹$، x تنها می‌تواند عددی مثبت باشد:

$$\lg x^۲ = \lg ۸۱ \Rightarrow x^۲ = ۸۱ \Rightarrow x = \pm ۹$$

می‌توانستیم، تبدیل‌ها را این‌طور انجام دهیم:

$$\lg x^۲ = \lg ۹^۲ \Rightarrow ۲\lg|x| = ۲\lg ۹$$

که از آن‌جا به دست می‌آمد:

$$|x| = ۹ \Rightarrow x = \pm ۹$$

۱۶. باز هم عدم دقت. دانش‌آموزی، معادلهٔ

$$(۳^{\sqrt{۰/۵x}} + ۱۹)^۲ = ۱۰۰۰۰$$

را، این طور حل کرده بود:

$$۳^{۰/۵x} + ۳۸ \times ۳^{\sqrt{۰/۵x}} + ۳۶۱ = ۱۰۰۰۰$$

و سپس، آن را ادامه داده بود. در آغاز این حل، دو اشتباه وجود دارد. اشتباه اول، مربوط به توان دوم عبارت است؛ در واقع

$$(۳^{\sqrt{۰/۵x}})^۲ = ۳^{۲\sqrt{۰/۵x}}$$

اشتباه دوم، در آن‌جاست که، برای حل این معادله، لزومی ندارد، پرانتز را به توان برسانیم. معادله، به سادگی به این صورت درمی‌آید:

$$۳^{\sqrt{۰/۵x}} + ۱۹ = ۱۰۰$$

سمت چپ این برابری، مقداری مثبت است؛ به همین دلیل، در سمت راست مقدار منفی $(۱۰۰-)$ را ننوشتیم. از معادلهٔ اخیر، به ترتیب، به دست می‌آید:

$$۳^{\sqrt{۰/۵x}} = ۸۱ = ۳^۴;\ \sqrt{۰/۵x} = ۴$$

که از آن‌جا، به سادگی، به جواب معادله می‌رسیم: $x = ۳۲$.

۱۷. مراقب معادله‌های لگاریتمی باشید. بسیاری از دانش‌آموزان، ضمن تبدیل معادله‌های لگاریتمی، خود را به نتیجه‌هایی می‌رسانند که، به دلیل نقض قانون‌های عمل و یا دلیل‌های دیگر، درست نیست. چند نمونه می‌آوریم:

دانش‌آموزی، برای حل معادلهٔ

$$\log_۲ ۴ + \frac{\log_۲(۱۰ - x)}{\log_۲ x} = \frac{۲\log_۲ ۴}{\log_۲ x}$$

این‌طور آغاز کرده بود:

$$۴[(۱۰ - x) - x] = ۱۶ - x$$

توجه کنید: $\log A - \log B = \log \frac{A}{B}$؛ ولی این دانش‌آموز از دستور $\frac{\log A}{\log B} = \log(A - B)$ استفاده کرده است که درست نیست. راه حل معادله ساده و، به ترتیب، چنین است:

$$1 + \frac{\log_4(10 - x)}{\log_4 x} = \frac{2}{\log_4 x};$$
$$\log_4 x + \log_4(10 - x) = 2 = \log_4 16;$$
$$\log_4[x(10 - x)] = \log_4 16;\ x(10 - x) = 16$$

که از آن‌جا، به معادلهٔ $x^2 - 10x + 16 = 0$ می‌رسیم. معادله دو جواب دارد: $x_1 = 2$ و $x_2 = 8$.

۲) معادلهٔ

$$\log_3 x \cdot \log_3(3x) = \log_3(81x)$$

در ورقهٔ امتحانی، این طور حل شده بود:

$$\log_3(3x^2) = \log_3(81x);\ 3x^2 = 81x$$

که در نتیجه، جواب معادله $x = 27$ می‌شود.

در حل این معادله، دو اشتباه جدی دیده می‌شود. اول، حاصل ضرب لگاریتم‌های دو عدد، برابر با لگاریتم حاصل ضرب آن‌ها گرفته شده است. دوم، ضمن حل معادلهٔ $3x^2 = 81x$، جواب $x = 0$ از قلم افتاده است. درست است که $x = 0$؛ جواب بیرونی است و در معادله صدق نمی‌کند، ولی این نکته در راه حل دانش‌آموز بیان نشده است. راه حل معادله دشوار نیست و، به ترتیب، چنین است:

$$\log_3 x(\log_3 3 + \log_3 x) = \log_3 81 + \log_3 x;$$

$$\log_3 x(1+\log_3 x) = 4 + \log_3 x;$$
$$(\log_3 x)^2 = 4;\ \log_3 x = \pm 2$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x_1 = 9$، $x_2 = \frac{1}{9}$.

۳) به این معادله و راه‌حل‌های نادرست و درست آن توجه کنید:

$$\lg 2 + \lg(4^{x-2} + 9) = 1 + \lg(2^{x-2} + 1)$$

راه حل اشتباه. معادله به این صورت درمی‌آید:

$$2 + 4^{x-2} + 9 = 10 + 2^{x-2} + 1$$

که ادامهٔ آن دشوار نیست. در این «راه حل»، به اشتباه، جای لگاریتم عددها خود عددها، در نظر گرفته شده است.

راه حل درست. معادله را، به ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\lg[2(4^{x-2} + 9)] = \lg[10(2^{x-2} + 1)];$$
$$2(4^{x-2} + 9) = 10(2^{x-2} + 1)$$

که اگر فرض کنیم $y = 2^{x-2}$، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = 4$$

و سرانجام به دست می‌آید: $x_1 = 2$، $x_2 = 4$.

۴) و برای این معادله: $4^x - 5^x = 0$.

راه حل اشتباه. معادله را تبدیل می‌کنیم (با لگاریتم گرفتن از دو طرف):

$$\lg(4^x - 5^x) = 0;\ x\lg 4 - x\lg 5 = 0;$$
$$x(\lg 4 - \lg 5) = 0;\ x = 0$$

جواب درست، ولی راه حل اشتباه است. دو اشتباه در این راه حل وجود دارد: اول این‌که، لگاریتم صفر، معنا ندارد و برابر صفر نمی‌شود؛ دوم این‌که، لگاریتم تفاضل دو عدد، برابر با تفاضل لگاریتم‌های آن‌ها نیست. همین دو اشتباه، در این‌جا، اثر یکدیگر را از بین برده‌اند و، به تصادف، جواب درست به دست آمده است.

راه حل درست. به ترتیب داریم:

$$۴^x = ۵^x;\ \frac{۴^x}{۵^x} = ۱;\ \left(\frac{۴}{۵}\right)^x = ۱;$$
$$\left(\frac{۴}{۵}\right)^x = \left(\frac{۴}{۵}\right)^{\circ};\ x = \circ$$

البته به یاری لگارتیم هم می‌توانستیم معادله را حل کنیم:

$$۴^x = ۵^x;\ x\lg۴ = x\lg۵;$$
$$x(\lg۴ - \lg۵) = \circ;\ x = \circ$$

۱۸. تغییر پایهٔ لگاریتم. عمل با لگاریتم‌هایی که پایه‌های متفاوت دارند، برای بسیاری از دانش‌آموزان، دشواری ایجاد می‌کند و در تغییر دادن پایهٔ لگاریتم، دچار اشتباه می‌شوند؛ دستور تغییر پایهٔ لگاریتم، چنین است:

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \qquad (۱)$$

که در آن $a > \circ$، $N > \circ$، $b > \circ$، $a \neq ۱$ و $b \neq ۱$. از آن‌جا

$$\log_a b = \frac{۱}{\log_b a} \qquad (۲)$$

بی‌اطلاعی از دستورهای (۱) و (۲)، منجر به این می‌شود که یا معادله را نتوانیم حل کنیم و یا، ضمن حل، دچار اشتباه بشویم. برای آشنا شدن بهتر

با این دستورها، چند مساله را (که از مساله‌های مسابقه‌ای انتخاب شده‌اند) حل می‌کنیم.

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۲} ۵ \log_{۵} x \log_{۳} x - (۲ - \log_{۵} ۲) \log_{۲} x \log_{۳} ۵ = ۰$$

حل: دامنهٔ متغیر، یعنی مقدارهای قابل قبول برای x، عبارت است از $x > ۰$. با استفاده از دستور (۱)، معادله را تبدیل می‌کنیم:

$$\log_{۲} ۵ \times \frac{\log_{۲} x}{\log_{۲} ۵} \times \frac{\log_{۲} x}{\log_{۲} ۳} - \left(۲ - \frac{\log_{۲} ۲}{\log_{۲} ۵}\right) \log_{۲} x \times \frac{\log_{۲} ۵}{\log_{۲} ۳} = ۰$$

که پس از ساده کردن، به دست می‌آید:

$$\log_{۲}^{۲} x + (۱ - ۲ \log_{۲} ۵) \log_{۲} x = ۰;$$

$$۱)\ \log_{۲} x = ۰ \Rightarrow x_{۱} = ۲^{۰} = ۱;$$

$$۲)\ \log_{۲} x = ۲ \log_{۲} ۵ - ۱ = \log_{۲} ۲۵ - \log_{۲} ۲ = \log_{۲} \frac{۲۵}{۲}$$

پاسخ. $x_{۱} = ۱$، $x_{۲} = ۱۲\frac{۱}{۲}$.

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$(\log_{x} ۵ + ۲) \log_{۵}^{۲} x = ۱$$

حل. برای x، باید شرط‌های $x > ۰$ و $x \neq ۱$ وجود داشته باشد. اگر از دستور $\log_{b} a = \frac{۱}{\log_{a} b}$ استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$(\log_{x} ۵ + ۲) \cdot \frac{۱}{\log_{x}^{۲} ۵} = ۱$$

از آن‌جا، پس از آزاد کردن معادله از مخرج، نتیجه می‌شود:

$$\log_x^{۲} ۵ - \log_x ۵ - ۲ = ۰;$$
$$\log_x ۵ = -۱,\ \log_x ۵ = ۲$$

پاسخ. $x_۱ = \frac{۱}{۵}$ و $x_۲ = \sqrt{۵}$.

□

برای حل برخی از معادله‌های لگاریتمی، می‌توان از دستور زیر استفاده کرد:

$$\log_a N = \log_{(a^m)}(N^m) \qquad (۳)$$

مثال ۳. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۸۱} x - ۲\log_۳ x + ۵\log_۹ x = ۱/۵$$

حل: برای مجهول x باید داشته باشیم: $x > ۰$. با توجه به دستور (۳)، معادله را می‌توان این طور نوشت:

$$\log_{۸۱} x - ۲\log_{۸۱}(x^۴) + ۵\log_{۸۱}(x^۲) = ۱/۵$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$\log_{۸۱} x - ۸\log_{۸۱} x + ۱۰\log_{۸۱} x = ۱/۵$$

پاسخ. $x = ۹$.

□

اغلب، با چنان معادله‌های لگاریتمی روبه‌رو می‌شویم که، با وجود پایه‌های مختلف برای لگاریتم‌ها، هیچ نیازی به تغییر پایه پیدا نمی‌کنیم. به عنوان نمونه، به این دستگاه توجه کنید:

$$\begin{cases} \log_{۲}(xy) = ۵ \\ \log_{\frac{۱}{۲}}\left(\frac{x}{y}\right) = ۱ \end{cases}$$

این دستگاه، خیلی ساده، منجر به دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} xy = ۲^{۵} = ۳۲ \\ \frac{x}{y} = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

پاسخ. $(۴, ۸)$، $(-۴, -۸)$.

۱۹. حل معادله‌ها و دستگاه‌های نامتعارف. چند نمونه می‌آوریم.

۱) مطلوب است حل دستگاه معادله‌های

$$\begin{cases} x^{y} = ۹ \\ \sqrt[y]{۳۲۴} = ۲x^{۲} \end{cases}$$

در آغاز، راه‌حل یکی از دانش‌آموزان را در برگ امتحانی خود می‌آوریم. دستگاه را می‌توان این‌طور نوشت:

$$\begin{cases} x^{y} = ۹ \\ ۳۲۴^{\frac{۱}{y}} = ۲x^{۲} \end{cases}$$

سپس، در هر معادله، از دو طرف در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم:

$$\begin{cases} y\lg x = \lg ۹ \\ \frac{۱}{y}\lg ۳۲۴ = \lg ۲ + ۲\lg x \end{cases}$$

از معادلهٔ اول، y را بر حسب x به دست می‌آوریم:

$$y = \frac{\lg ۹}{\lg x}$$

و در معادلهٔ دوم قرار می‌دهیم؛ به‌ترتیب، خواهیم داشت:

$$\frac{\lg x \lg ۳۲۴}{\lg ۹} = \lg ۲ + ۲\lg x;$$

$$\frac{\lg x \lg (۲ \times ۹)^۲}{\lg ۳^۲} = \lg ۲ + ۲\lg x;$$

$$\frac{\lg x \times (۲\lg ۲ + ۴\lg ۳)}{۲\lg ۳} = \lg ۲ + ۲\lg x;$$

$$\lg x(\lg ۲ + ۲\lg ۳) - ۲\lg ۳ \lg x = \lg ۲ \lg ۳;$$

$$\lg ۲ \lg x = \lg ۲ \lg ۳;$$

$$\lg x = \lg ۳; \; x = ۳$$

سپس

$$y = \frac{\lg ۹}{\lg ۳} = \frac{۲\lg ۳}{\lg ۳} = ۲$$

این راه‌حل، به‌جز این که اندکی طولانی است، همراه با یک اشتباه است. در $x^۲$ یا x^y، مقدار x می‌تواند منفی باشد، ولی وقتی از آن لگاریتم بگیریم،در $۲\lg x$ و $y\lg x$، باید مقدار x مثبت و مخالف واحد باشد؛ از صورت معادله اول دستگاه روشن است که $x \neq ۱$، ولی برای این‌که جواب احتمالی منفی را از دست ندهیم، باید بعد از لگاریتم گرفتن، آن را به صورت $\lg|x|$ بنویسیم که، در این صورت، معادلهٔ $\log|x| = \log ۳$، به دو جواب $x = \pm ۳$ می‌رسد. البته برای y، همان جواب ۲ به دست می‌آید. آزمایش هم نشان می‌دهد، هر دو جواب $(-۳, ۲)$ و $(۳, ۲)$ در معادله‌های دستگاه صدق می‌کنند.

در این‌جا، باید به نکته‌ای اشاره کنیم. در تابع نمایی با ضابطهٔ $y = a^x$، مقدار a، باید مثبت و مخالف واحد باشد. برای $a < ۰$، تابع نمایی a^x معنا ندارد. ولی وقتی در معادله‌ای با x^y سروکار داریم، از آن‌جا که ما به دنبال مقدارهای ثابتی برای x و y هستیم، مقدار x می‌تواند منفی هم باشد.

در این‌جا دستگاه را با روش دیگری، که در ضمن ساده‌تر است، حل می‌کنیم. معادلهٔ دوم دستگاه، به این صورت درمی‌آید:

$$(۲x^۲)^y = ۳۲۴ \Rightarrow ۲^y \times (x^y)^۲ = ۳۲۴$$

به‌جای x^y، مقدارش را از معادلهٔ اول دستگاه قرار می‌دهیم:

$$۲^y \times ۹^۲ = ۳۲۴ \Rightarrow ۲^y = ۴ = ۲^۲$$

از آن‌جا $y = ۲$. آن را در معادلهٔ اول دستگاه می‌گذاریم:

$$x^۲ = ۹ \Rightarrow x = \pm ۳$$

اندکی دقت، می‌تواند مزیت راه حل دوم را به شما نشان دهد. در حل این‌گونه دستگاه‌ها، هرگز آزمایش جواب را از یاد نبرید.

۲) این دستگاه را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} ۳^{x-y-۱} = ۱ \\ ۹^{x+y} = ۷۲۹ \end{cases}$$

بیشتر دانش‌آموزان، از دو طرف هریک از معادله‌ها، لگاریتم می‌گیرند؛ ولی می‌توان بدون متوسل شدن به لگاریتم، دستگاه را ساده کرد.

$$\begin{cases} ۳^{x-y-۱} = ۳^۰ \\ ۹^{x+y} = ۹^۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - y - ۱ = ۰ \\ x + y = ۳ \end{cases}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید: $x = ۲$، $y = ۱$،

۲۰. آزمایش جواب. برخی از دانش‌آموزان، بعد از حل معادله یا دستگاه، تردید دارند که: آیا باید جواب‌ها را آزمایش کرد یا نه؟ بعضی معتقدند که، در هر حال، باید جواب‌ها را در معادله یا دستگاه، مورد آزمایش قرار داد و بعضی دیگر، آزمایش جواب‌ها را ضروری نمی‌دانند. در واقع، حالت‌هایی وجود دارد که، در آن‌ها، آزمایش جواب ضروری است و دنبالهٔ حل معادله یا دستگاه به حساب می‌آید؛ حالت‌هایی هم وجود دارد که، در آن‌ها، نیازی به آزمایش جواب نیست. آزمایش جواب، به طور معمول، برای این است که، جواب یا جواب‌های خارجی را کنار بگذاریم. ورود جواب‌های خارجی، بیش از همه، در حالت‌های زیر پیش می‌آید:

الف) وقتی که دو طرف معادله را، که شامل جمله‌های کسری است، در مخرج مشترک کسرها ضرب کنیم. مثلا، برای آزاد کردن معادلهٔ

$$\frac{x-۵}{x-۱}+\frac{۵+۳x}{x^{۲}-۱}=۰$$

از مخرج‌ها، دو طرف آن را در $(x^{۲}-۱)$ ضرب می‌کنیم که، در این صورت، به معادلهٔ $x^{۲}-x=۰$ می‌رسیم که دو جواب دارد: $x=۰$ و $x=۱$. ولی $x=۱$ جواب خارجی است، زیرا مخرج‌ها را صفر می‌کند و مخرجِ صفر معنا ندارد.

ب) وقتی کسری یا کسرهایی را ساده می‌کنیم. مثلاً معادلهٔ

$$\frac{x^{۲}-۸۱}{x-۹}-۲x=۰$$

پس از ساده کردن کسر اول (صورت و مخرج بر $x-۹$ بخش‌پذیر است)، به صورت

$$x+۹-۲x=۰\Rightarrow x=۹$$

درمی‌آید که جواب حاصل، جواب خارجی است ($x = ۹$، مخرج کسر را صفر می‌کند). این معادله ریشه ندارد.

ج) وقتی جمله‌های متشابهی را که به صورت کسر یا رادیکالی یا لگاریتمی هستند، حذف کنیم. برای هر حالت، مثالی می‌آوریم:

۱) اگر در معادلهٔ

$$۴x^۲ - \frac{۲}{۳x^۲} - x^۳ + \frac{۲}{۳x^۲} = ۰$$

جمله‌های متشابه $-\frac{۲}{۳x^۲}$ و $\frac{۲}{۳x^۲}$ را حذف کنیم، به معادله

$$۴x^۲ - x^۳ = ۰ \Rightarrow x_۱ = x_۲ = ۰,\ x_۳ = ۴$$

می‌رسیم که، در آن، جواب‌های $x_۱$ و $x_۲$ خارجی‌اند.

۲) اگر در معادلهٔ

$$x + ۳\sqrt{x + ۲} + ۵ - ۳\sqrt{x + ۲} = ۰$$

جمله‌های شامل رادیکال را، که قرینهٔ یکدیگرند، حذف کنیم، به جواب $x = -۵$ می‌رسیم، که جواب خارجی است، زیرا به‌ازای آن، مقدار $x + ۲$ که زیر رادیکال است، منفی می‌شود.

۳) اگر در معادلهٔ

$$x^۲ + \frac{۱}{۴}\lg x + x = ۶ + \frac{۱}{۴}\lg x$$

جملهٔ $\frac{۱}{۴}\lg x$ را از دو طرف برابری حذف کنیم، به دست می‌آید:

$$x^۲ + x - ۶ = ۰;\ x_۱ = -۳,\ x_۲ = ۲$$

که در آن، ریشهٔ $x_۱ = -۳$، ریشهٔ خارجی است.

د) وقتی دو طرف معادله را، به توان عددی زوج برسانیم. مثلاً، برای حل معادله

$$\sqrt{۲x - ۶} + \sqrt{x + ۴} = ۵$$

دو طرف برابری را به توان ۲ می‌رسانیم:

$$۳x - ۲ + ۲\sqrt{۲x^۲ + ۲x - ۲۴} = ۲۵$$

اگر جملهٔ شامل رادیکال را در سمت چپ برابری نگه داریم و بقیهٔ جمله‌ها را به سمت راست برابری ببریم و، دوباره، دو طرف برابری را مجذور کنیم، بعد از عمل‌های ساده به معادلهٔ درجه دوم

$$x^۲ - ۱۷۰x + ۸۲۵ = ۰$$

می‌رسیم که دو ریشه دارد: $x_۱ = ۱۶۵$ و $x_۲ = ۵$. در این‌جا تنها $x = ۵$ ریشهٔ معادله است و $x = ۱۶۵$ در معادله صدق نمی‌کند و ریشهٔ خارجی است.

ه) وقتی از دستور مربوط به مجموع لگاریتم‌ها استفاده می‌کنیم. مثلاً برای حل معادلهٔ

$$\lg(x - ۱) + \lg(x + ۱) = ۰$$

به ترتیب خواهیم داشت:

$$\lg(x^۲ - ۱) = ۰;\ x^۲ - ۱ = ۱;\ x = \pm\sqrt{۲}$$

و $x = -\sqrt{۲}$ ریشهٔ خارجی است.

در هرکدام از این حالت‌ها، ضمن انجام عمل‌ها، دامنهٔ مقدارهای قابل قبول برای مجهول، گسترش می‌یابد و، در نتیجه، جواب (یا جواب‌های) خارجی وارد معادله می‌شود.

پیش می‌آید که، آزمایش جواب، دشوار، طولانی و خسته کننده می‌شود. در چنین حالتی، باید ریشهٔ خارجی را با تجزیه و تحلیل جوابی که به دست آمده است و در رابطه با راه حلی که منجر به این جواب شده است، جست و جو کرد. به ویژه، اگر جواب در دامنهٔ مقدارهای قابل قبول برای مجهول، قرار ندارد، باید بدون آزمایش، آن را کنار گذاشت. بنابراین، پیدا کردن دامنهٔ متغیر مجهول، قبل از آغاز به حل معادله، لازم است.

ولی عکس این مطلب همیشه درست نیست. یعنی ممکن است جوابی در حوزهٔ مقدارهای قابل قبول برای x قرار گیرد، ولی جزو جواب‌های خارجی باشد. اگر جوابی در دامنهٔ متغیر واقع باشد، به شرطی جواب خارجی نیست که، ضمن عمل‌ها از تبدیل‌هایی استفاده کرده باشیم که معادلهٔ مفروض را تغییر نداده باشد و، به اصطلاح، هر تبدیلی، منجر به یک هم‌ارزی بشود. اگر، یک تبدیل، معادله را به هم‌ارز خودش تبدیل نکند، ممکن است ریشهٔ خارجی وارد معادله شود و یا، برعکس، ریشه‌ای را باز چشم ما پنهان کند. مثلا، اگر با تبدیل معادلهٔ $(\lg x)^۲ - \lg x = ۰$، به معادلهٔ $\lg x - ۱ = ۰$ برسیم، دامنهٔ متغیر، تغییر نمی‌کند (برای هر دو معادله، باید شرط $x > ۰$ برقرار باشد)، ولی ضمن این تبدیل، جواب معادلهٔ $\lg x = ۰$ را از دست داده‌ایم. این معادله، دو ریشه دارد: $x_۱ = ۱$ و $x_۲ = ۱۰$.

گاهی، پیدا کردن دامنهٔ مقدارهای قابل قبولِ مجهول دشوار است؛ در این حالت آزمایش جواب‌ها (به خاطر تبدیل‌های احتمالی نا هم‌ارز) ضروروی است.

باید توجه داشت که عمل‌هایی مثل لگاریتم گرفتن از دو طرف برابری، ضرب یا تقسیم دو طرف برابری بر عبارت شامل مجهول، ممکن است محدودهٔ

دامنه را تنگ‌تر کند و، در نتیجه، جواب یا جواب‌هایی را از دست بدهیم.

۲۱. خیلی‌ها نمی‌دانند، مجموعهٔ جواب برای نامعادله، در چه حالتی اجتماع دو مجموعه و در چه حالتی، اشتراک دو مجموعه است. مثلاً برخی از دانش‌آموزان، مجموعهٔ جواب را برای نامعادلهٔ $x^{۲} > ۱$، به صورت $x > \pm ۱$ می‌نویسند که بی‌معنی است. در واقع، مجموعهٔ جواب این نامعادله را، باید به یکی از دو صورت زیر نوشت:

$$|x| > ۱, \ (x < -۱ \text{ یا } x > ۱)$$

۲۲. گاهی، دو طرف نامعادله را، در عبارتی شامل مجهول ضرب می‌کنند تا نامعادله را از مخرج آزاد کنند. این عمل را نمی‌توان انجام داد، مگر این که از مثبت یا منفی بودن این عامل ضرب اطلاع داشته باشیم. در واقع، دو طرف نامعادله را می‌توان در مقدار مثبت ضرب کرد، ولی اگر دو طرف نامعادله را در مقداری منفی ضرب کنیم، باید جهت نابرابری را تغییر دهیم. دو طرف نامعادله را نباید در عبارتی ضرب کرد که هم می‌تواند مثبت باشد و هم منفی. مثلاً، ضمن حل نامعادلهٔ

$$\frac{۲x + ۳}{x - ۱} > ۱ \qquad (۱)$$

اگر دو طرف را در $x - ۱$ (که از مثبت یا منفی بودن آن اطلاعی نداریم) ضرب کنیم:

$$۲x + ۳ > x - ۱$$

به جواب $x > -۴$ می‌رسیم که درست نیست، مثلاً $x = ۰$ در نامعادله صدق نمی‌کند، زیرا منجر به نابرابری نادرست $-۳ > ۱$ می‌شود.

برخی از دانش‌آموزان هم، نامعادله را به صورت دستگاه

$$\begin{cases} ۲x + ۳ > ۱ \\ x - ۱ > ۱ \end{cases}$$

می‌نویسند که، نادرستی آن روشن است.

برای حل این نامعادله، باید به این ترتیب عمل کرد:

$$\frac{۲x+۳}{x-۱}-۱>۰ \Rightarrow \frac{x+۴}{x-۱}>۰$$

برای این که کسری مثبت باشد، دو حالت پیش می‌آید. یا صورت و مخرج هر دو مثبت‌اند و یا هر دو منفی. یعنی به دو دستگاه نامعادله می‌رسیم:

$$\begin{cases} x+۴>۰ \\ x-۱>۰ \end{cases} \text{ یا } \begin{cases} x+۴<۰ \\ x-۱<۱ \end{cases}$$

در حالت اول به دست می‌آید

$$\begin{cases} x>-۴ \\ x>۱ \end{cases} \Rightarrow x>۱$$

(وقتی x از ۱ بزرگتر باشد، از ۴− هم بزرگتر است). و در حالت دوم

$$\begin{cases} x<-۴ \\ x<۱ \end{cases} \Rightarrow x<-۴$$

پاسخ. $۱<x$ یا $x<-۴$.

ولی برای حل نامعادلهٔ

$$\frac{۲x+۱۹}{x^۲+۵}>۱$$

می‌توان، بدون نگرانی، دو طرف نابرابری را در $x^۲+۵$ ضرب کرد:

$$۲x+۱۹>x^۲+۵$$

زیرا $x^{۲} + ۵$ به‌ازای هر عدد حقیقی x، مقداری مثبت است. مجموعهٔ جواب این نامعادله عبارت است از

$$۱ - \sqrt{۵} < x < ۱ + \sqrt{۵}$$

۲۳. برای حل نامعادله‌های لگاریتمی، تعیین دامنهٔ متغیر ضروری است. نمونه‌ای را حل می‌کنیم. در نامعادلهٔ

$$\log_{۳} \log_{۵}(۲۵ - ۴x) < ۱$$

باید داشته باشیم: $۲۵ - ۴x > ۱$، زیرا در حالت $۰ < ۲۵ - ۴x < ۱$، مقدار $\log_{۵}(۲۵ - ۴x)$، منفی می‌شود و، در نتیجه، $\log_{۳} \log_{۵}(۲۵ - ۴x)$ معنای خود را از دست می‌دهد. پس دامنهٔ متغیر عبارت است از $x < ۶$. با این شرط خواهیم داشت:

$$\log_{۵}(۲۵ - ۴x) < ۳;$$
$$۲۵ - ۴x < ۵^{۳} = ۱۲۵;\ ۴x > -۱۰۰;\ x > -۲۵$$

پاسخ. $-۲۵ < x < ۶$.

۲۴. درک سطحی از مفهوم قدر مطلق و مفهوم ریشهٔ حسابی می‌تواند موجب اشتباه‌های گوناگونی، ضمن حل مساله‌ها، شود. در این‌جا، برای آشنایی جدی‌تر با این دو مفهوم اساسی ریاضیات دبیرستانی و برای جلوگیری از اشتباه در حل معادله‌ها، نامعادله‌ها و رسم نمودارها، چند مسالهٔ ساده را با توضیح بیشتری حل می‌کنیم.

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$|x - ۳| + |x - ۴| - ۱ = ۰$$

حل: ریشه‌های عبارت‌های داخل قدر مطلق را به دست می‌آوریم و این ریشه‌ها را به ترتیب صعودی (یعنی، از کم به زیاد) می‌نویسیم:

$$x - ۳ = ۰,\ x - ۴ = ۰;\ x_۱ = ۳,\ x_۲ = ۴$$

مجموعهٔ همهٔ عددها را در سه بازه در نظر می‌گیریم:

$$x \leq ۳,\ ۳ < x < ۴,\ ۴ \leq x$$

و در هریک از این بازه‌ها، به طور جداگانه، معادله را حل می‌کنیم:

۱) $x \leq ۳$. برای مقدارهایی از x که در این بازه قرار دارند، داریم:

$$|x - ۳| = -(x - ۳) = -x + ۳;$$
$$|x - ۴| = -(x - ۴) = -x + ۴$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$-x + ۳ - x + ۴ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۳$$

$x = ۳$، یکی از ریشه‌های معادله است، زیرا با شرط $x \leq ۳$ سازگار است.

۲) $۳ < x < ۴$. در این بازه داریم:

$$|x - ۳| = x - ۳ \text{ و } |x - ۴| = -x + ۴$$

و معادله چنین می‌شود:

$$x - ۳ - x + ۴ - ۱ = ۰$$

که یک اتحاد است؛ یعنی معادلهٔ مفروض، به‌ازای هر مقداری از x که در بازهٔ $(۳, ۴)$ باشد، برقرار است.

۳) $x \geq ۴$. در این بازه داریم:

$$|x - ۳| = x - ۳, \ |x - ۴| = x - ۴$$

و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$x - ۳ + x - ۴ - ۱ = ۰ \Rightarrow x = ۴$$

پاسخ. $۳ \leq x \leq ۴$.

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$\lg\sqrt{(x - ۱۰)^۲} - ۱ = ۰$$

حل. به ترتیب داریم:

$$\lg|x - ۱۰| = \lg ۱۰; \ |x - ۱۰| = ۱۰$$

اگر $x \geq ۱۰$، آن وقت $|x - ۱۰| = x - ۱۰$ و در نتیجه

$$x - ۱۰ = ۱۰ \Rightarrow x_۱ = ۲۰$$

اگر $x < ۱۰$، آن وقت $|x - ۱۰| = -x + ۱۰$ و در نتیجه

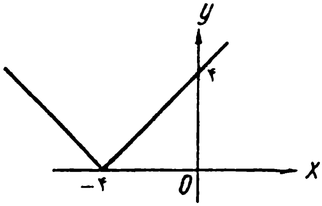
$$-x + ۱۰ = ۱۰ \Rightarrow x_۲ = ۰$$

مثال ۳. این نامعادله را حل کنید:

$$|۴ - ۳x| < ۲x$$

حل. سمت راست نابرابری، تنها وقتی از قدر مطلق سمت چپ بزرگتر است که داشته باشیم: $x > ۰$. نامعادله را می‌توان این طور نوشت:

$$-۲x < ۴ - ۳x < ۲x$$



شکل ۱ :

که می‌توان آن را به صورت دستگاهی شامل دو نامعادله نوشت:

$$\begin{cases} -۲x < ۴ - ۳x \\ ۴ - ۳x < ۲x \end{cases}$$

از نامعادلهٔ اول به دست می‌آید $x < ۴$ و از نامعادلهٔ دوم $x > \frac{۴}{۵}$.

پاسخ. $\frac{۴}{۵} < x < ۴$.

مثال ۴. نمودار $y = |x + ۴|$ را رسم کنید.

حل. مقدار y را می‌توان این طور نوشت:

$$y = \begin{cases} x + ۴ & (x \geq -۴) \\ -x - ۴ & (x < -۴) \end{cases}$$

اکنون باید نمودار $y = x + ۴$ را رسم و بخشی از آن را انتخاب کنیم که روی آن، داشته باشیم $x \geq -۴$، سپس نمودار $y = -x - ۴$ را برای $x < -۴$ رسم کنیم (شکل ۱). روشن است که تمامی نمودار در بالای محور $x'x$ قرار می‌گیرد.

۲۵. قضیه‌های مربوط به لگاریتم حاصل‌ضرب، خارج قسمت و توان ـ که برای عددهای مثبت ثابت شده‌اند ـ می‌توانند موجب گسترش دامنهٔ مجهول و یا محدودتر شدن آن بشوند. اگر x و y، عددهای حقیقی مخالف

صفر و، در ضمن، هم‌علامت باشند، آن‌وقت

$$\log_a(xy) = \log_a|x| + \log_a|y| \qquad (۱)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a|x| - \log_a|y| \qquad (۲)$$

همچنین، برای هر عدد $x \neq ۰$ و هر عدد زوج n.

$$\log_a(x^n) = n\log_a|x| \qquad (۳)$$

و با شرط $x \neq ۰$، $x \neq ۱$ و $N > ۰$، برای هر عدد زوج n:

$$\log_{(x^n)} N = \frac{۱}{n}\log_{|x|^N} \qquad (۴)$$

چند مثال برای استفاده از دستورهای (۱) تا (۴) می‌آوریم.

مثال ۱. این عبارت را ساده کنید و حاصل آن را به‌ازای $x = -۴$ به دست آورید:

$$A = \log_۴\left(\frac{x^۲}{۴}\right) - ۲\log_۴(۴x^۴)$$

حل: داریم:

$$A = \log_۴ x^۲ - \log_۴ ۴ - ۲\log_۴ ۴ - ۲\log_۴ x^۴ =$$
$$= ۲\log_۴|x| - ۱ - ۲ - ۸\log_۴|x| = -۳ - ۶\log_۴|x| =$$
$$= -۳(۱ + ۲\log_۴|x|) = -۳(۱ + ۲\log_۴|-۴|) =$$
$$= -۳(۱ + ۲) = -۹$$

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$\lg x^۲ = ۴$$

حل. به ترتیب داریم:

$$۲\lg|x| = ۴;\ \lg|x| = ۲;\ |x| = ۱۰۰$$

پاسخ. $x_۱ = ۱۰۰$، $x_۲ = -۱۰۰$.

۲۶. دیده شده است که، برای نوشتن جواب، وقتی دامنهٔ معادله، نامعادله یا تابع مورد نظر است، اشتباه‌هایی پیش می‌آید. مثلاً در تابع با ضابطهٔ

$$y = \sqrt{-x} + \frac{۱}{\sqrt{۴+x}}$$

به این ترتیب، عمل و استدلال می‌شود:

۱) $-x \geq ۰$، پس $x \leq ۰$؛

۲) $۴ + x > ۰$، پس $x > -۴$.

بنابراین باید داشته باشیم $x \leq ۰$ یا $x > -۴$.

این نتیجه‌گیری نادرست است و باید جواب‌های $x \leq ۰$ و $x > -۴$ را با هم در نظر گرفت، یعنی اشتراک دو مجموعه از عددهای حقیقی $x \leq ۰$ و $x > -۴$ را پیدا کرد: $-۴ < x \leq ۰$.

مثال. دامنهٔ تابع با ضابطهٔ زیر را پیدا کنید:

$$y = \sqrt{\lg\frac{x-۵}{x^۲-۴}}$$

حل. تابع وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$\lg\frac{x-۵}{x^۲-۴} \geq ۰ \Rightarrow \frac{x-۵}{x^۲-۴} \geq ۱;$$

$$\frac{x-۵}{x^۲-۴} - ۱ \geq ۰;\ \frac{-x^۲+x-۱}{x^۲-۴} \geq ۰;$$

$$\frac{x^۲ - x + ۱}{x^۲ - ۴} \leq ۰; \quad \frac{\left(x - \frac{۱}{۲}\right)^۲ + \frac{۳}{۴}}{x^۲ - ۴} \leq ۰$$

می‌بینیم، صورت کسر همیشه مثبت است (به‌ازای هر عدد حقیقی x)، پس

$$x^۲ - ۴ < ۰ \quad x^۲ < ۴; \quad |x| < ۲$$

از آن‌جا، پاسخ به دست می‌آید: $-۲ < x < ۲$.

۲. مثلثات

در این‌جا هم، در جدول ۲، در ستون دست راست، عملی با اشتباه و در ستون سمت چپ، عمل درست آن داده شده است. نوع اشتباه و دلیل آن را پیدا کنید.

نادرست	درست
$(\mathrm{tg}x^3)^2 = \mathrm{tg}x^6$	$(\mathrm{tg}x^3)^2 = \mathrm{tg}^2(x^3)$
$\frac{4\sin 6x}{2} = 2\sin 3x$	$\frac{4\sin 6x}{2} = 2\sin 6x$
$\sqrt{m^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha} = 1$	$\sqrt{m^2\sin^2\alpha + m^2\cos^2\alpha} = \lvert m\rvert$
$\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = \frac{2a}{\sin x\cos x}$	$\frac{a}{\sin x} + \frac{a}{\cos x} = \frac{a(\sin x + \cos x)}{\sin x\cos x}$
$\frac{d + d\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2d\cot\frac{\alpha}{2}$	$\frac{d + d\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = d\cdot\frac{1+\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = d\cdot\cot\frac{\alpha}{4}$
$\sin 7x - \sin 5x = \sin 2x$	$\sin 7x - \sin 5x = 2\sin x\cos 6x$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\alpha = 1 - \sin\alpha$	$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

اکنون به توضیح بیشتر دربارهٔ بعضی اشتباه‌ها می‌پردازیم.

۲۷. پیش آمده است که نمادهای $\sin x$، $\cos x$، $\mathrm{tg}x$ و $\cot x$، به صورت ضرب در نظر گرفته شده‌اند:

$$\sin\cdot x,\ \cos\cdot x,\ \mathrm{tg}\cdot x,\ \cot\cdot x$$

و در نتیجه، اشتباه‌های ناهنجاری از این گونه رخ داده است:

$$\frac{\sin ۲x}{\sin x} = \frac{۱}{۲};\ \sin(\pi - x) = \sin\pi - \sin x;$$
$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \mathrm{tg}(\alpha + \beta);$$
$$\frac{\sin(۲x - ۱۰)}{۲} = \sin(x - ۵)$$

۲۸. اشتباه‌هایی که، شبیه جبر، در ساده کردن کسرها پیش می‌آید. مثل

$$۱)\ \frac{\sin\alpha + \cos\alpha - ۱}{\sin\alpha} = ۱ + \cos\alpha - ۱ = \cos\alpha;$$
$$۲)\ \frac{\sin\alpha + \sin ۲\alpha + \sin ۳\alpha}{\cos\alpha + \cos ۲\alpha + \cos ۳\alpha} = \mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}۲\alpha + \mathrm{tg}۳\alpha$$

خودتان روشن کنید، برای ساده کردن این کسرها، چه اشتباهی رخ داده است؟

۲۹. عدم توجه به این که لگاریتم عددهای منفی، بی معنی است و تلاش در این زمینه که، برای محاسبه یک عبارت یا حل یک معادله مثلثاتی، از جمله‌هایی مثل $\lg\sin\alpha$ یا $\lg\cos\alpha$ استفاده شود، در حالی که انتهای کمان α در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. همیشه از جمله‌ای می‌توان لگاریتم گرفت که به مثبت بودن آن اطمینان داشته باشیم.

۳۰. بسیار دیده شده است که دانش‌آموز، ضمن محاسبه، نوشته است:

$$\sqrt{\sin^۲ x} = \sin x;\ \sqrt{\mathrm{tg}^۲ x} = \mathrm{tg}x;$$
$$\sqrt{(\sin x + \cos x)^۲} = \sin x + \cos x$$

و از یاد برده است که، مثل جبر، ریشهٔ حسابی یک عدد، وقتی فرجهٔ رادیکال عددی زوج باشد، همیشه مثبت است. در واقع باید نوشت:

$$\sqrt{\sin^۲ x} = |\sin x| = \begin{cases} \sin x & (\text{وقتی انتهای کمان، در ربع‌های اول و دوم باشد}) \\ -\sin x & (\text{وقتی انتهای کمان، در ربع‌های سوم و چهارم باشد}) \end{cases}$$

$$\sqrt{\text{tg}^{۲} x} = |\text{tg} x| = \begin{cases} \text{tg} x & \text{(انتهای کمان } x \text{ در ربع اول یا سوم)} \\ -\text{tg} x & \text{(انتهای کمان } x \text{ در ربع دوم یا چهارم)} \end{cases}$$

$$\sqrt{(\sin x + \cos x)^{۲}} = |\sin x + \cos x|$$

برای این‌که حاصل این عبارت را، برای مقدارهای مختلف x، بدون نماد قدر مطلق بنویسیم، به چند نکته توجه می‌کنیم:

۱) سینوس و کسینوس، وقتی انتهای کمان x در ربع اول دایرهٔ مثلثاتی باشد، مثبت‌اند و وقتی انتهای کمان x در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی باشد، منفی‌اند، بنابراین

انتهای کمان x در ربع اول : $\sqrt{(\sin x + \cos x)^{۲}} = \sin x + \cos x;$

انتهای کمان x در ربع سوم : $\sqrt{(\sin x + \cos x)^{۲}} =$

$= -(\sin x + \cos x);$

ولی وقتی انتهای کمان x در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی باشد. در این حالت مقدار $\sin x$ مثبت و مقدار $\cos x$ منفی است. در نیمهٔ اول این ربع، قدر مطلق سینوس، از قدر مطلق کسینوس بزرگتر و در نیمهٔ دوم این ربع، قدر مطلق کسینوس از قدر مطلق سینوس بزرگتر است (بگویید چرا؟). بنابراین $\sin x + \cos x$، در نیمهٔ اول ربع دوم دایره مثلثاتی مثبت و در نیمهٔ دوم آن منفی است.

به همین ترتیب، می‌توان نتیجه گرفت که $\sin x + \cos x$، در نیمهٔ اول ربع چهارم منفی و در نیمهٔ دوم آن، مثبت است. با جمع بندی آن چه گفته شد، می‌توان نوشت (کمان x را، در یک دور دایرهٔ مثلثاتی در نظر گرفته‌ایم):

$$\sqrt{(\sin x + \cos x)^{۲}} = \begin{cases} \sin x + \cos x & \left(-\frac{\pi}{۴} < x \leq \frac{۳\pi}{۴}\right) \\ -(\sin x + \cos x) & \left(\frac{۳\pi}{۴} < x \leq \frac{۷\pi}{۴}\right) \end{cases}$$

یادداشت. برای مقدار $|\sin x + \cos x|$، می‌توان از تجزیهٔ عبارت داخل قدرمطلق استفاده کرد. داریم:

$$\sin x + \cos x = \sin x + \sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) =$$
$$= ۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = \sqrt{۲}\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$$

$\sqrt{۲}$ مقداری مثبت است. باید ببینیم $\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$، به‌ازای چه مقدارهایی از x مثبت و به‌ازای چه مقدارهایی از x منفی است. کسینوس، وقتی مثبت است که انتهای کمان در ربع اول یا چهارم باشد؛ یعنی برای مثبت بودن $\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right)$، باید داشته باشیم:

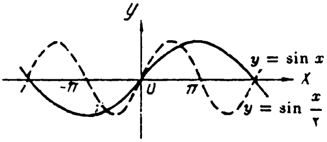
$$-\frac{\pi}{۲} < x - \frac{\pi}{۴} < \frac{\pi}{۲} \Rightarrow -\frac{\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۴}$$

(کمان x را در یک دور دایرهٔ مثلثاتی و از $-\frac{\pi}{۴}$ تا $\frac{۷\pi}{۴}$ در نظر گرفته‌ایم). به همین ترتیب، برای منفی بودن کسینوس، باید انتهای کمان آن درربع‌دوّم یا سوم باشد:

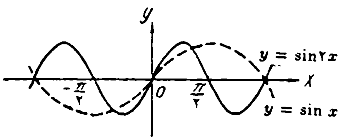
$$\frac{\pi}{۲} < x - \frac{\pi}{۴} < \frac{۳\pi}{۲} \Rightarrow \frac{۳\pi}{۴} < x < \frac{۷\pi}{۴}$$

به این ترتیب

$$|\sin x + \cos x| = \begin{cases} \sin x + \cos x, & \left(-\frac{\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۴}\right) \\ -(\sin x + \cos x), & \left(\frac{۳\pi}{۴} < x < \frac{۷\pi}{۴}\right) \end{cases}$$



شکل ۳



شکل ۲

و این، همان جوابی است که، قبل از این، پیدا کرده بودیم.

۳۱. بسیاری از کسانی که می‌توانند نمودارهای

$$y = \sin x,\ y = \cos x,\ y = \mathrm{tg} x,\ y = \cot x$$

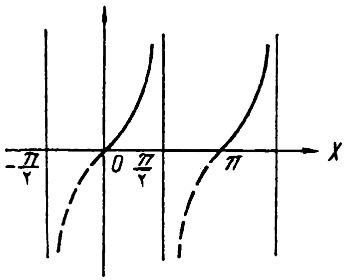
را رسم کنند، از عهدهٔ رسم نمودارهای زیر برنمی‌آیند:

$$y = ۳\sin x,\ y = \cos ۵x,\ y = \mathrm{tg}(x - ۱),\ y = \cot x + \frac{۱}{۴}$$

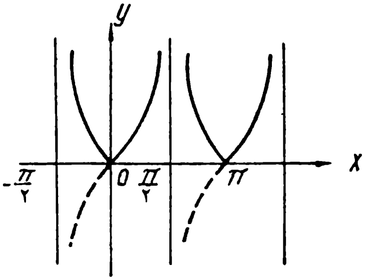
اغلب دیده می‌شود که می‌گویند: برای رسم نمودار $y = \sin ۲x$، باید نمودار $y = \sin x$ را در اختیار داشت و، برای روش رسم، این راه را پیشنهاد می‌کنند: «برای رسم نمودار $y = \sin ۲x$، باید نمودار $y = \sin x$ را، در طول محور $x'x$ تا دو برابر باز کرد و، برای رسم نمودار $y = \sin \frac{x}{۲}$، باید نمودار $y = \sin x$ را، در طول محور $x'x$ جمع کرد، به نحوی که هر فاصله به نصف خودش تقلیل پیدا کنید».

این بیان درست نیست. نمودارهای $y = \sin ۲x$ و $y = \sin \frac{x}{۲}$ در مقایسه با نمودار $y = \sin x$، در شکل‌های ۲ و ۳ داده شده است.

سفارش می‌کنیم، دربارهٔ تبدیل نمودارها و نتیجه گرفتن یک نمودار از روی نمودار دیگر (چه در جبر و چه در مثلثات) بیشتر بیندیشید و بیشتر تمرین کنید تا دچار اشتباه نشوید. در $y = \sin x$ و $y = \sin ax$، همیشه



شکل ۴



شکل ۵

مقدارهای ماکزیمم و می‌نیمم نسبی با هم برابرند (۱+ و ۱−)، بنابراین، نمی‌توان گفت اگر دو سمت یکی از نمودارها را به راست و چپ بکشیم و نمودار را باز کنیم، نمودار دیگری به دست می‌آید.

۳۲. تصور ناقص دربارهٔ قدر مطلق، موجب رسم نادرست نمودارهایی می‌شود که، معادلهٔ آن‌ها، شامل قدر مطلق است. دیده شده است که نمودار $y = |\mathrm{tg}x|$ را به صورت شکل ۴ رسم کرده‌اند، در حالی که نمودار درست آن، به گونه‌ای است که در شکل ۵ دیده می‌شود.

۳۳. معمول است که، برای حل معادله‌های مثلثاتی، مقدارهای قابل قبول متغیر (یعنی دامنه) را از یاد می‌برند که یکی از علت‌های پدید آمدن اشتباه است. مثلاً، برای حل معادلهٔ

$$\mathrm{tg}۳x - \mathrm{tg}x = ۴\sin x$$

به‌ترتیب می‌نویسند:

$$\frac{\sin ۳x\cos x - \cos ۳x\sin x}{\cos ۳x\cos x} = ۴\sin x;$$

$$\frac{\sin ۲x}{\cos ۳x\cos x} = ۴\sin x;$$

$$\sin 2x = 4\sin x\cos x\cos 3x;$$
$$\sin 2x = 2\sin 2x\cos 3x;$$
$$\sin 2x - 2\sin 2x\cos 3x = 0;$$
$$\sin 2x(1 - 2\cos 3) = 0;$$

و از آن‌جا نتیجه می‌گیرند:

$$\sin 2x = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}k\pi \ (k \in \mathbf{Z});$$
$$1 - 2\cos 3x = 0 \Rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} = \cos\frac{\pi}{3};$$
$$x = \frac{2}{3}k\pi \pm \frac{\pi}{9} \ (k \in \mathbf{Z})$$

پاسخ. $x_1 = \frac{1}{2}k\pi$ و $x_2 = \frac{2}{3}k\pi + \pm\frac{\pi}{9}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

این پاسخ درست نیست. $x_1 = \frac{1}{2}k\pi$، به‌ازای مقدارهای فرد k، جواب معادله نیست، زیرا $\mathrm{tg}x$ و $\mathrm{tg}3x$، معنای خود را از دست می‌دهند. اشتباه از این‌جا سرچشمه می‌گیرد که، دامنهٔ مجهول‌ها، معین نشده است $(m \in \mathbf{Z}, x \neq (2m+1)\frac{\pi}{2})$. پاسخ درست مساله چنین است:

$$x_1 = k\pi,\ x_2 = \frac{2}{3}k\pi \pm \frac{\pi}{9}$$

۳۴. دیده شده است که دانش‌آموز، شرط مساله را برای حل معادله در نظر نمی‌گیرد. به این مساله توجه کنید:

مساله. معادلهٔ $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$ را، با شرط $0 < x < \frac{\pi}{2}$ حل کنید.

دانش‌آموز، ردیف این عمل‌ها را انجام می‌دهد:

$$\cos\frac{x}{۲}-\left(\cos^۲\frac{x}{۲}-\sin^۲\frac{x}{۲}\right)=۱;$$

$$\cos\frac{x}{۲}-\cos^۲\frac{x}{۲}+\sin^۲\frac{x}{۲}=۱;$$

$$\cos\frac{x}{۲}-۲\cos^۲\frac{x}{۲}=۰$$

$$\cos\frac{x}{۲}\left(۱-۲\cos\frac{x}{۲}\right)=۰$$

و از آن‌جا نتیجه می‌گیرد:

$$۱)\ \cos\frac{x}{۲}=۰;\ \frac{x}{۲}=k\pi+\frac{\pi}{۲};\ x=۲k\pi+\pi$$

$$۲)\ ۱-۲\cos\frac{x}{۲}=۰;\ \cos\frac{x}{۲}=\frac{۱}{۲};\ \frac{x}{۲}=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۳};$$

$$x=۴k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$$

پاسخ. $x_۱=(۲k+۱)\pi$، $x_۲=(۶k\pm۱)+\frac{۲\pi}{۳}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

دانش‌آموز، شرط مساله، یعنی $۰<x<\frac{\pi}{۲}$ را از یاد برده است. عمل‌ها درست، ولی پاسخ، نادرست است. در واقع، این معادله، با توجه به شرط آن، جواب ندارد.

۳۵. در حل معادله‌های مثلثاتی، اشتباه‌های گوناگونی رخ می‌دهد. جواب خاص به‌جای جواب کلی نوشته می‌شود یا برعکس، کمان به جای عدد می‌آید یا برعکس و ... مثلاً

۱) برای حل معادلهٔ

$$\sin x-\cos x=۰$$

جواب $x = \frac{\pi}{۴}$ به‌جای $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ می‌آید؛

۲) خیلی‌ها، جواب معادلهٔ

$$\cos(۴۵^\circ - x) = ۰$$

را $۴۵^\circ - x = ۹۰^\circ$ به جای $۴۵^\circ - x = ۱۸۰^\circ k + ۹۰^\circ$ می‌نویسند؛

۳) برای معادلهٔ

$$\mathrm{tg}x = \sqrt{۳}$$

مقدار $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$ را به جای $x = k\pi + \frac{\pi}{۳}$ می‌گیرند؛

۴) جواب کلی معادلهٔ

$$\sin x = \frac{۱}{۲}$$

را به صورت $x = (-۱)\mathrm{arcsin}\frac{\pi}{۶} + k\pi$، به‌جای $x = (-۱)^k\frac{\pi}{۶} + k\pi$ یا $x = (-۱)^k\mathrm{arcsin}\frac{۱}{۲} + k\pi$ می‌نویسند؛ برای این‌که اشتباه‌هایی از این گونه پیش نیاید، باید جواب معادله‌هایی را که در جدول سوم (صفحه بعد) آمده است به یاد داشت.

در همهٔ این دستورها، k عددی است درست: $k \in \mathbf{Z}$.

یادداشت. جواب کلی معادلهٔ $\sin x = m$ را، به این صورت هم می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} x = ۲k\pi + \mathrm{arcsin}m \\ x = (۲k + ۱)\pi - \mathrm{arcsin}m \end{cases}$$

معادله	جواب
$\sin x = m,\ -۱ < m < ۱$	$x = k\pi + (-۱)^k \mathrm{arcsin} m$
$\cos x = m,\ -۱ < m < ۱$	$x = ۲k\pi \pm \mathrm{arccos} m$
$\mathrm{tg} x = m,\ m \in \mathbf{R}$	$x = k\pi + \mathrm{arctg} m$
$\cot x = m,\ m \in \mathbf{R}$	$x = k\pi + \mathrm{arccot} m$
$\sin x = ۰$	$x = k\pi$
$\sin x = ۱$	$x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$
$\sin x = -۱$	$x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲}$
$\cos x = ۰$	$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$
$\cos x = ۱$	$x = ۲k\pi$
$\cos x = -۱$	$x = ۲k\pi + \pi$
$\mathrm{tg} x = ۰$	$x = k\pi$
$\cot x = ۰$	$x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$

چند نمونهٔ دیگر از نتیجه‌گیری‌های اشتباه در حل معادله‌های مثلثاتی:

۵) چون $\sin^۲ x = \frac{۳}{۴}$، پس $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$؛

جواب درست معادله: $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$؛

۶) از معادلهٔ $\cos^۲ x = \frac{۱}{۴}$ به دست آمده است:

$$x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$$

جواب درست: $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$؛

۷) چون $\mathrm{tg}^۲ x = ۳$، پس $\mathrm{tg} x = \sqrt{۳}$ و $x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۳}$؛

جواب درست: $\text{tg}x = \pm\sqrt{۳}$ و $x = k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$.

برای این‌که این گونه اشتباه‌ها پیش نیاید، جدول سوم را برای چند معادلهٔ مثلثاتی دیگر ادامه می‌دهیم.

معادله	جواب
$\sin^۲ x = c,\ ۰ \le c \le ۱$	$x = k\pi \pm \arcsin\sqrt{c}$
$\cos^۲ x = c,\ ۰ \le c \le ۱$	$x = k\pi \pm \arccos\sqrt{c}$
$\text{tg}^۲ x = c,\ c \ge ۰$	$x = k\pi \pm \text{arctg}\sqrt{c}$
$\cot^۲ x = c,\ c \ge ۰$	$x = k\pi \pm \text{arccot}\sqrt{c}$

۳۶. عادی‌ترین اشتباه، ضمن حل معادله‌های مثلثاتی، تقسیم همهٔ جمله‌های معادله، به عبارتی است که شامل مجهول باشد. در نتیجه، ریشه‌هایی از معادله، از دست می‌رود. مثلاً، اگر ضمن حل معادلهٔ

$$\cos x(۲\sin ۲x - ۱) = \cos x \sin ۲x$$

دو طرف معادله را بر $\cos x$ تقسیم کنیم، به معادله

$$۲\sin ۲x - ۱ = \sin ۲x$$

می‌رسیم که، در واقع، جواب حاصل از معادلهٔ $\cos x = ۰$ را از دست داده‌ایم. در حالت اول ـ که دو طرف را بر $\cos x$ تقسیم کردیم ـ جواب $x = k\pi + \frac{\pi}{۴}$ به دست می‌آید، در حالی‌که جوا درست معادله چنین است:

$$x = k\pi + \frac{\pi}{۲},\ x = k\pi + \frac{\pi}{۴}\ (k \in \mathbf{Z})$$

۳۷. گاهی، معادله‌های مثلثاتی را از راه‌های نامتعارف و طولانی حل می‌کنند. به چند نمونه توجه کنید.

۱) معادلهٔ

$$\sin x + \cos x = ۰$$

در آغاز به این صورت نوشته می‌شود:

$$\sin x + \sin\left(\frac{\pi}{۲} - x\right) = ۰$$

و سپس، مجموع دو سینوس، به صورت ضرب تبدیل می‌شود:

$$۲\sin\frac{\pi}{۴}\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = ۰$$

که، در نتیجه، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{۴}\right) = ۰$$

این راه حل، نادرست نیست، ولی راه حل بسیار ساده‌تری وجود دارد. در این معادله، $\cos x$ مخالف صفر است (چرا؟)، بنابراین می‌توان دو طرف معادله را بر $\cos x$ تقسیم کرد که، به ترتیب، به دست می‌آید:

$$\mathrm{tg}x + ۱ = ۰;$$

$$\mathrm{tg}x = -۱;$$

$$x = k\pi - \frac{\pi}{۴}\ (k \in \mathbf{Z})$$

یادداشت. هر معادله را که نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ همگن یا متجانس باشد، می‌توان به همین ترتیب حل کرد. معادله‌های زیر نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ همگن‌اند:

$$۲\sin x - ۳\cos x = ۰ \qquad (۱)$$

$$۲\sin^۲ x + ۳\cos^۲ x = ۵\sin x\cos x \qquad (۲)$$

$$\sin^۳ x + ۲\cos^۳ x = ۳\sin x\cos^۲ x \qquad (۳)$$

معادله‌ای را نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ همگن گویند که، همهٔ جمله‌های آن، نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ از یک درجه باشند.

در معادلهٔ (۱)، همهٔ جمله‌ها نسبت به $\sin x$ و $\cos x$ از درجهٔ اول، در معادلهٔ (۲) از درجهٔ دوم و در معادلهٔ (۳) از درجهٔ سوم‌اند.

برای حل معادلهٔ (۱)، دو طرف برابری را بر $\cos x$ تقسیم می‌کنیم:

$$۲\text{tg}x - ۳ = ۰;\ x = k\pi + \text{arctg}\left(\frac{۳}{۲}\right)$$

برای حل معادلهٔ (۲)، دو طرف برابری را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&۲\text{tg}^۲x + ۳ = ۵\text{tg}x;\ ۲\text{tg}^۲x - ۵\text{tg}x + ۳ = ۰;\\
&\text{tg}x = ۱,\ \text{tg}x = \frac{۳}{۲};\\
&x = k\pi + \frac{\pi}{۴},\ x = k\pi + \text{arctg}\left(\frac{۳}{۲}\right)
\end{aligned}$$

برای حل معادلهٔ (۳)، که معادله‌ای همگن نسبت به سینوس و کسینوس و از درجهٔ سوم است، دو طرف برابری را بر $\cos^۳ x$ تقسیم می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\text{tg}^۳x + ۲ = ۳\text{tg}x;\\
&\text{tg}^۳x - ۳\text{tg}x + ۲ = ۰;\\
&(\text{tg}^۳x - \text{tg}x) + (-۲\text{tg}x + ۲) = ۰;\\
&\text{tg}x(\text{tg}^۲x - ۱) - ۲(\text{tg}x - ۱) = ۰;\\
&(\text{tg}x - ۱)(\text{tg}^۲x + \text{tg}x - ۲) = ۰;\\
&(\text{tg}x - ۱)^۲(\text{tg}x + ۲) = ۰;\\
&x = k\pi + \frac{\pi}{۴},\ x = k\pi + \text{arctg}(-۲)
\end{aligned}$$

توجه کنید: معادلهٔ

$$a\sin^۲ x + b\cos^۲ x + c\sin x\cos x + d = ۰ \qquad (۴)$$

به ظاهر همگن نیست، زیرا جملهٔ d از درجهٔ صفر و دیگر جمله‌ها از درجهٔ دوم‌اند (نسبت به سینوس و کسینوس). ولی اگر توجه کنیم که، عدد d را می‌توان به صورت

$$d\sin^۲ x + d\cos^۲ x$$

نوشت، برایمان روشن می‌شود که معادلهٔ (۴) همگن و، نسبت به $\sin x$ و $\cos x$، از درجهٔ دوم است.

۲) می‌توان برای حل معادلهٔ

$$\frac{۱}{\cos^۲ x} - \mathrm{tg}^۲ x + \cot\left(\frac{\pi}{۲} + x\right) = \frac{\cos ۲x}{\cos^۲ x}$$

در این جهت تلاش کرد که همهٔ جمله‌ها را به سینوس تبدیل کنیم:

$$\frac{\sin^۲ x + \cos^۲ x}{\cos^۲ x} - \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos\left(\frac{\pi}{۲} + x\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{۲} + x\right)} = \frac{\cos^۲ x - \sin^۲ x}{\cos^۲ x}$$

سپس، همه کسینوس‌ها را به سینوس تبدیل کرد و غیره.

در حالی که معادله، خیلی ساده است و با تبدیل همهٔ جمله‌ها به $\mathrm{tg}x$، به این صورت درمی‌آید:

$$۱ + \mathrm{tg}^۲ x - \mathrm{tg}^۲ x + \mathrm{tg}x = ۱ - \mathrm{tg}^۲ x;$$

$$\mathrm{tg}^۲ x - \mathrm{tg}x = ۰$$

معادله‌ای درجه دوم و ناقص که به سادگی حل می‌شود.

برای این که راه حل درست و کوتاه معادلهٔ مثلثاتی به دست آید، پیش از هر چیز باید قضیه‌های مربوط به برابری دو تابع مثلثاتی هم نام را بدانیم. شرط‌های لازم و کافی، برای برابری دو تابع مثلثاتی هم‌نام چنین‌اند:

۱) $\sin\alpha = \sin\beta$، به شرطی که

$$\alpha - \beta = ۲k\pi \text{ یا } \alpha + \beta = (۲k + ۱)\pi$$

۲) $\cos\alpha = \cos\beta$، به شرطی که

$$\alpha + \beta = ۲k\pi \text{ یا } \alpha - \beta = ۲k\pi$$

۳) $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$، به شرطی که $\alpha - \beta = k\pi$، در ضمن

$$\alpha \neq (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲},\ \beta \neq (۲k + ۱)\frac{\pi}{۲};$$

۴) $\cot\alpha = \cot\beta$، به شرطی که $\alpha - \beta = k\pi$ و

$$\alpha \neq k\pi,\ \beta \neq k\pi$$

کسی که از این قضیه‌ها آگاه نباشد، معادلهٔ

$$\frac{\mathrm{tg}(۵x + ۵)}{\mathrm{tg}(۳x + ۵)} = ۱$$

را، مثلاً به این ترتیب حل می‌کند:

$$\frac{\mathrm{tg}۵x + \mathrm{tg}۵}{۱ - \mathrm{tg}۵x\mathrm{tg}۵} \times \frac{۱ - \mathrm{tg}۳x\mathrm{tg}۵}{\mathrm{tg}۳x + \mathrm{tg}۵} = ۱$$

که ادامهٔ آن و رسیدن به جواب، چندان ساده نیست.

ولی اگر معادله را به این صورت بنویسیم:

$$\mathrm{tg}(۵x + ۵) = \mathrm{tg}(۳x + ۵)$$

به سادگی به دست می‌آید:

$$(۵x + ۵) - (۳x + ۵) = k\pi;$$
$$x = \frac{۱}{۲}k\pi$$

۳۸. تجربهٔ امتحان‌ها نشان داده است که دانش‌آموزان اغلب برای حل معادله‌های مثلثاتی، از تبدیل حاصل ضرب دو تابع مثلثاتی به صورت مجموع، پرهیز می‌کنند و راه دیگری را برای حل معادله انتخاب می‌کنند که منجر به راه حلی طولانی و غیر عقلانی می‌شود. در حالی که، بسیاری از معادله‌ها، با استفاده از دستور تبدیل ضرب به مجموع، به سادگی حل می‌شوند.

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$\sin x \sin ۳x = \frac{۱}{۲}$$

حل. با استفاده از دستور

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

معادلهٔ مفروض، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱}{۲}(\cos ۲x - \cos ۴x) = \frac{۱}{۲};$$
$$\cos ۲x - \cos ۴x - ۱ = ۰;$$
$$\cos ۲x - (۱ + \cos ۴x) = ۰;$$
$$\cos ۲x - ۲\cos^۲ ۲x = ۰;$$
$$\cos ۲x(۱ - ۲\cos ۲x) = ۰$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$۱)\ \cos ۲x = ۰ \Rightarrow ۲x = k\pi + \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲}k\pi + \frac{\pi}{۴};$$

پاسخ. $x = (۲k + ۱)\frac{\pi}{۴}$

$$۲)\ \cos ۲x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow ۲x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{۶};$$

پاسخ. $x = (۶k \pm ۱)\frac{\pi}{۶}$

مثال ۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin ۵x \cos ۳x = \frac{۱}{۲} \sin ۸x - ۰/۵$$

حل. از دستور

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{۱}{۲}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$

استفاده می‌کنیم، معادله به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{۱}{۲}(\sin ۸x + \sin ۲x) = \frac{۱}{۲}(\sin ۸x - ۱)$$

که پس از ساده کردن، به معادله‌ای ساده می‌رسیم:

$$\sin ۲x = -۱ \Rightarrow ۲x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۲} \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{۴};$$

پاسخ. $x = (۴k - ۱)\frac{\pi}{۴}$

مثال ۳. این معادله را حل کنید:

$$\cos x \cos ۲x = \cos ۳x$$

حل. با استفاده از دستور

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{۱}{۲}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

به دست می‌آید:

$$\frac{۱}{۲}(\cos ۳x + \cos x) = \cos ۳x;$$
$$\cos ۳x = \cos x$$
$$۱)\ ۳x + x = ۲k\pi \Rightarrow ۴x = ۲k\pi$$
$$x = \frac{۱}{۲}k\pi$$
$$۲)\ ۳x - x = ۲n\pi \Rightarrow ۲x = ۲n\pi$$
$$x = n\pi$$

جواب $x = n\pi$ در بین جواب‌های $x = \frac{۱}{۲}k\pi$ وجود دارد (به‌ازای $k = ۲n$). بنابراین، می‌توان جواب معادله را چنین نوشت: $x = \frac{۱}{۲}k\pi$.

۳۹. بعضی از معادله‌های مثلثاتی را باید به طور غیر مستقیم و با استفاده از برخی نکته‌های ظریف حل کرد، و در همین جاست که خیلی از دانش‌آموزان دچار دشواری می‌شوند. دو نمونه می‌آوریم.

مثال ۱. این معادله را حل کنید:

$$\sin ۴x \cos ۱۶x = ۱ \qquad (۱)$$

حل: بیشتر دانش‌آموزان، گام نخست را برمی‌دارند، عبارت سمت چپ معادلهٔ (۱) را به مجموع تبدیل می‌کنند و به دست می‌آورند:

$$\sin ۲۰x - \sin ۱۲x = ۲ \qquad (۲)$$

ولی از این‌جا به بعد درمی‌مانند و نمی‌توانند آن را ادامه دهند. ولی اندکی دقت در برابری (۲)، روش ادامهٔ حل را مشخص می‌کند. از آن‌جا که می‌دانیم

$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$. بنابراین، تنها در حالتی، برابری (۲) می‌تواند برقرار باشد که داشته باشیم:

$$(3) \quad \begin{cases} \sin 20x = 1 \\ \sin 12x = -1 \end{cases}$$

به این ترتیب، حل معادلهٔ (۱)، منجر به حل دستگاه (۲) می‌شود. توجه کنید، (۳) یک دستگاه است، یعنی جواب باید در هر دو معادلهٔ دستگاه صوق کند؛ جواب معادلهٔ (۱)، عبارت است از جواب مشترک دو معادلهٔ دستگاه (۳). مجموعهٔ جواب را، برای هریک از معادله‌های دستگاه (۳) پیدا می‌کنیم:

$$1)\ 20x = 2m\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{10}m\pi + \frac{\pi}{40},\ (m \in \mathbf{Z})$$

$$2)\ 12x = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{6}n\pi - \frac{\pi}{24},\ (n \in \mathbf{Z})$$

توجه کنید: به عمد، جواب یک معادله را بر حسب m و جواب دیگری را بر حسب n نوشته‌ایم، زیرا وقتی m، عدد درستی را اختیار کند، n ناچار نیست همان عدد را بپذیرد. مثلاً می‌توان $m = 6$ و $n = 4$ گرفت که، در این صورت، به دست می‌آید:

$$1)\ m = 6:\ x = \frac{3\pi}{5} + \frac{\pi}{40} = \frac{24\pi + \pi}{40} = \frac{5\pi}{8};$$

$$2)\ n = 4:\ x = \frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{24} = \frac{16\pi - \pi}{24} = \frac{5\pi}{8}$$

یعنی $x = \frac{5\pi}{8}$ (که در هر دو معادلهٔ دستگاه (۳) صدق می‌کند) عضوی از مجموعهٔ جواب در معادلهٔ (۱) است.

حل مساله را دنبال می‌کنیم. برای این‌که، دو معادلهٔ دستگاه (۳)، جواب‌های برابر داشته باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{۱}{۱۰}m\pi + \frac{\pi}{۴۰} = \frac{۱}{۶}n\pi - \frac{\pi}{۲۴}$$

که اگر آن را به $\frac{\pi}{۲}$ ساده کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{m}{۵} + \frac{۱}{۲۰} = \frac{n}{۳} - \frac{۱}{۱۲}$$

و اگر در این برابری، n را بر حسب m به دست آوریم:

$$n = ۱ + \frac{۲(m-۱)}{۵}$$

n، عددی درست است، بنابراین باید $(m-۱)$ بر ۵ بخش‌پذیر باشد، یعنی داشته باشیم:

$$m = ۵k + ۱,\ (k \in \mathbf{Z})$$

به این ترتیب، برای x، به دست می‌آید:

$$x = \frac{۱}{۱۰}m\pi + \frac{\pi}{۴۰} = \frac{۵k+۱}{۱۰}\pi + \frac{\pi}{۴۰} = \frac{۱}{۲}k\pi + \frac{\pi}{۴۰} + \frac{\pi}{۱۰};$$

$$x = (۴k+۱)\frac{\pi}{۸};\ (k \in \mathbf{Z})$$

و این، مجموعهٔ جواب، برای معادلهٔ (۱) است.

مثال ۲. مقدارهای x و y را از معادلهٔ زیر پیدا کنید:

$$\cos ۲x - ۴\cos ۲y + ۴\sin x - ۸\cos y - ۹ = ۰$$

حل. در این مساله، به‌جز راه حل، دشواری دیگری هم برای دانش‌آموزان پیش می‌آید. چگونه می‌توان، با در دست داشتن تنها یک معادله، مقدارهای دو مجهول را پیدا کرد.

معادله را، به ترتیب، به این صورت تبدیل می‌کنیم.

$$(۱ - ۲\sin^۲ x) - ۴(۲\cos^۲ y - ۱) + ۴\sin x - ۸\cos y - ۹ = ۰;$$
$$-۲\sin^۲ x - ۸\cos^۲ y + ۴\sin x - ۸\cos y - ۴ = ۰;$$
$$\sin^۲ x + ۴\cos^۲ y - ۲\sin x + ۴\cos y + ۲ = ۰;$$
$$(\sin x - ۱)^۲ + (۲\cos y + ۱)^۲ = ۰$$

مجموع دو مقدار غیر منفی برابر صفر شده است؛ بنابراین، تنها به شرطی برابری برقرار است که داشته باشیم:

$$\begin{cases} \sin x - ۱ = ۰ \\ ۲\cos y + ۱ = ۰ \end{cases}$$

معادله، منجر به یک دستگاه شد؛ از معادلهٔ اول دستگاه، مقدار x و از معادلهٔ دوم آن، مقدار y به دست می‌آید.

پاسخ. $x = ۲m\pi + \frac{\pi}{۲}$ و $y = ۲k\pi \pm \frac{۲\pi}{۳}$ ($m \in \mathbf{Z}$ و $k \in \mathbf{Z}$).

۴۰. عدم مهارت در تبدیل یک عبارت مثلثاتی به ضرب، موجب می‌شود که نتوانیم پاسخ را، به اندازهٔ کافی ساده کنیم؛ این وضع، بیش از همه، ضمن حل مساله‌های هندسی پیش می‌آید.

مثال. فرض کنید، در مساله‌ای، برای سطح جانبی یک هرم، به این پاسخ رسیده باشیم:

$$S = \frac{h^۲(\sin\alpha\sin\beta\mathrm{tg}\beta + \sin\alpha\sin\beta\mathrm{tg}\alpha + \sin\beta\mathrm{tg}\alpha + \sin\alpha\mathrm{tg}\beta)}{۲\sin\alpha\sin\beta\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$

ساده نکردن این کسر، به معنای آن است که، حل مساله را، در نیمه راه رها کرده باشیم. در این‌جا، این کسر را ساده می‌کنیم:

$$S=\frac{h^{۲}}{۲}\cdot\frac{\sin\alpha\sin\beta\left(\mathrm{tg}\beta+\mathrm{tg}\alpha+\frac{۱}{\cos\alpha}+\frac{۱}{\cos\beta}\right)}{\sin\alpha\sin\beta\,\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}=$$

$$=\frac{h^{۲}}{۲}\cdot\frac{\frac{\sin\beta}{\cos\beta}+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{۱}{\cos\alpha}+\frac{۱}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=$$

$$=\frac{h^{۲}}{۲}\cdot\frac{\sin\beta\cos\alpha+\sin\alpha\cos\beta+\cos\beta+\cos\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{h^{۲}}{۲}\cdot\frac{\sin(۹۰^\circ-\alpha)[\cos(۹۰^\circ-\beta)+۱]+\sin(۹۰^\circ-\beta)[\cos(۹۰^\circ-\alpha)+۱]}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{h^{۲}}{۲}\cdot\frac{۲\sin\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)\cdot ۲\cos^{۲}\left(۴۵^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)+۲\sin\left(۴۵^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)\cos\left(۴۵^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)\cdot ۲\cos^{۲}\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}=$$

$$=\frac{۲h^{۲}\cos\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(۴۵^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}\times$$

$$\times\left[\cos\left(۴۵^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)\sin\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)+\sin\left(۴۵^\circ-\frac{\beta}{۲}\right)\cos\left(۴۵^\circ-\frac{\alpha}{۲}\right)\right]=$$

$$= \frac{۲h^۲ \cos\left(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(۴۵^\circ - \frac{\beta}{۲}\right)}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot$$

$$\cdot \sin\left(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲} + ۴۵^\circ - \frac{\beta}{۲}\right) =$$

$$= \frac{۲h^۲ \cos\left(۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۲}\right)\cos\left(۴۵^\circ - \frac{\beta}{۲}\right)\cos\frac{\alpha+\beta}{۲}}{\sin\alpha\sin\beta}$$

۴۱. به ویژه دربارهٔ حل نامعادله‌های سادهٔ مثلثاتی، دشواری‌هایی برای دانش‌آموزان وجود دارد.

مثال‌ها

۱) جواب نامعادلهٔ $\sin x < ۰$، به صورت $x > ۱۸۰^\circ$ نوشته می‌شود نادرستی این جواب روشن است. دانش‌آموز، یک دور دایرهٔ مثلثاتی را در ذهن خود داشته و با نوشتن این جواب می‌خواسته است بگوید که انتهای کمان x، باید رد ربع‌های سوم و چهارم دایرهٔ مثلثاتی باشد؛ ولی مگر ۴۰۰ درجه یا ۵۰۰ درجه از ۱۸۰ درجه بزرگتر نیست؟ در ضمن $\sin ۴۰۰^\circ$ یا $\sin ۵۰۰^\circ$، مقداری مثبت است و نامعادله را نقض می‌کند.

برای این که جواب این نامعادله را بنویسیم، در آغاز جواب‌هایی از x را که با شرط $۰ < x < ۲\pi$ سازگارند پیدا می‌کنیم؛ به نابرابری $\pi < x < ۲\pi$ می‌رسیم. سپس مجموعهٔ جواب‌های x را با اضافه کردن $۲k\pi$ به دست می‌آوریم:

$$۲k\pi + \pi < x < ۲k\pi + ۲\pi,\ (k \in \mathbf{Z})$$

۲) دیده شده است که، برای جواب نامعادلهٔ $\sin x > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ می‌نویسند: $x > ۴۵^\circ$.

ببینیم، جواب صحیح کدام است؟ برای $\sin x = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، با شرط $۰ < x < ۲\pi$، داریم:

$$x_۱ = \frac{\pi}{۴},\ x_۲ = \frac{۳\pi}{۴}$$

بنابراین، برای $\sin x > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، با شرط $۰ < x < ۲\pi$، خواهیم داشت:

$$\frac{\pi}{۴} < x < \frac{۳\pi}{۴}$$

و یا، برای مجموعهٔ همهٔ جواب‌های نامعادله

$$۲k\pi + \frac{\pi}{۴} < x < ۲k\pi + \frac{۳\pi}{۴},\ (k \in \mathbf{Z})$$

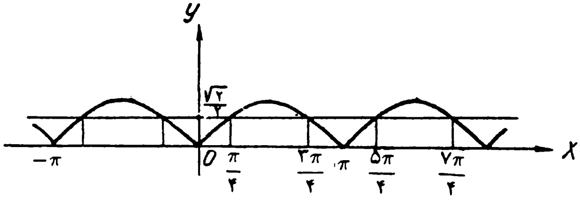
با رسم نمودار $y = \sin x$، جواب نامعادله را روی نمودار نشان دهید.

۳) نامعادلهٔ $|\sin x| > \frac{\sqrt{۲}}{۲}$، معمولاً در ورقه‌های امتحانی، حل نشده باقی می‌ماند. این نامعادله را، مثلاً می‌توان این طور حل کرد. ابتدا نموار $y = |\sin x|$ را رسم می‌کنیم (شکل ۶). روی شکل دیده می‌شود که باید مقدارهایی از x را در نظر گرفت که، برای آن‌ها، داشته باشیم:

$$k\pi + \frac{\pi}{۴} < x < k\pi + \frac{۳\pi}{۴},\ (k \in \mathbf{Z})$$

۴۲. دانش‌آموزان می‌دانند تابع متناوب یعنی چه و دورهٔ تناوب چیست! با وجود این، ضمن حل مساله‌ها، گاه در پیدا کردن کوچکترین دورهٔ تناوب در تابع‌های مثلثاتی دچار اشتباه می‌شوند. مثلاً، دورهٔ تناوب تابع

$$y = \cos ۵x - \sin ۲x$$



شکل ۶:

را، به این ترتیب تعیین می‌کنند:

برای $\cos ۵x$، دورهٔ تناوب $T_۱ = ۱۰\pi$؛

برای $\sin ۲x$، دورهٔ تناوب $T_۲ = ۴\pi$

یعنی دورهٔ تناوب تابع اصلی، برابر است با $T = ۶\pi$، که به کلی اشتباه است. راه حل درست چنین است:

چون دورهٔ تناوب سینوس و کسینوس، برابر است با ۲π

$$\cos ۵x = \cos(۵x + ۲\pi) = \cos ۵\left(x + \frac{۲\pi}{۵}\right),\ T_۱ = \frac{۲\pi}{۵};$$

$$\sin ۲x = \sin(۲x + ۲\pi) = \sin ۲(x + \pi),\ T_۲ = \pi$$

دورهٔ تناوب‌های $T_۱$ و $T_۲$ را، این طور می‌نویسیم:

$$T_۱ = ۲ \times \frac{\pi}{۵},\ T_۲ = ۵ \times \frac{\pi}{۵}$$

و کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۲ و ۵ را پیدا می‌کنیم. این عدد برابر است با ۱۰. بنابراین عدد $T = ۱۰ \times \frac{\pi}{۵} = ۲\pi$، دورهٔ تناوب تابع ماست.

۴۳. دانش‌آموزان می‌دانند که، برای دو کمان مکمل یکدیگر (دو کمانی که مجموعی برابر π یا ۱۸۰ درجه داشته باشند)، سینوس‌ها با هم برابرند و کسینوس‌ها، تانژانت‌ها و کتانژانت‌ها قرینهٔ یکدیگرند؛ همچنین می‌دانند،

برای دو کمان متمم یکدیگر (دو کمانی که مجموعی برابر $\frac{\pi}{۲}$ یا ۹۰ درجه داشته باشند)، سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژیانت دیگری برابر است:

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,;\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cos\alpha,\ \cos\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=$$
$$=\sin\alpha,\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۲}-\alpha\right)=\cot\alpha$$

ولی وقتی با عبارتی کم و بیش بغرنج‌تر روبه‌رو باشند، دچار سردرگمی می‌شوند و اشتباه می‌کنند و اشتباه‌ها به دو جنبه مربوط می‌شوند:

۱) وقتی مکمل یا متمم بودن کمان‌ها بلافاصله به چشم نخورد. به این معادلهٔ مثلثاتی توجه کنید.

$$\sin\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right)+\cos\left(\frac{۱۳\pi}{۱۸}-x\right)=۱ \qquad (۱)$$

دیده شده است که دانش‌آموز، برای حل این معادله، $\sin\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right)$ و $\cos\left(\frac{۱۳\pi}{۱۸}-x\right)$ را بسط داده و، سپس، متوقف مانده است.

برای حل معادلهٔ (۱)، تنها اندکی وقت لازم است: کمان‌های $\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right)$ و $\left(\frac{۱۳\pi}{۱۸}-x\right)$ متمم یکدیگرند:

$$\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right)+\left(\frac{۱۳\pi}{۱۸}-x\right)=$$
$$=-\frac{۲\pi}{۹}+\frac{۱۳\pi}{۱۸}=\frac{-۴\pi+۱۳\pi}{۱۸}=\frac{۹\pi}{۱۸}=\frac{\pi}{۲}$$

بنابراین $\sin\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right) = \cos\left(\frac{۱۳\pi}{۱۸}-x\right)$ و معادله به این صورت درمی‌آید:

$$۲\sin\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right) = ۱ \Rightarrow \sin\left(x-\frac{۲\pi}{۹}\right) = \frac{۱}{۲}$$

پاسخ. $x = ۲k\pi + \frac{۷\pi}{۱۸}$ و $x = (۲k+۱)\pi + \frac{\pi}{۱۸}$ $(k \in \mathbf{Z})$.

۲) وقتی با کمان‌های پیچیده‌تر سروکار داشته باشیم؛ به این نمونه‌ها توجه کنید:

$$۱)\ \sin ۱۳۰۵^\circ; \qquad ۲)\ \cos(۱۱\pi-\alpha); \qquad ۳)\operatorname{tg}\left(\frac{۱۳\pi}{۲}+\alpha\right)$$

$$۴)\ \cot\left(x-\frac{۷\pi}{۲}\right); \quad ۵)\ \sin\left(x-\frac{۹\pi}{۲}\right);$$

$$۶)\ \operatorname{tg}(\alpha - ۱۲۶۰^\circ)$$

برای ساده کردن چنین عبارت‌هایی، توجه به چند نکته لازم است:

I. می‌توان از کمان، $۲k\pi$ یا $۳۶۰^\circ k$ (یعنی هر چند دور دایره) کم کرد (یا چنین مقداری را به کمان اضافه کرد)، بدون این که در مقدار تابع مثلثاتی تغییری پدید آید؛

II. اگر کمان α، به صورت جمع یا تفاضل، با مضربی از π همراه باشد، با حذف این مضرب π، نام تابع مثلثاتی تغییر نمی‌کند؛

III اگر کمان α، با مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$، به صورت جمع یا تفریق همراه باشد، با حذف این مضرب فرد $\frac{\pi}{۲}$، نام تابع مثلثاتی تغییر می‌کند: سینوس به کسینوس، تانژانت به کتانژانت و برعکس، تبدیل می‌شود؛

IV. برای محاسبه، اگر با کمانی مثل α یا x سروکار دارید، آن را همیشه بین صفر و $\frac{\pi}{۲}$ به حساب آورید؛

۷. برای محاسبه ببینید کمان در چه ربعی از دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و علامت تابع مثلثاتی را تعیین کنید؛ سپس اگر α با مضربی از π همراه است نام تابع مثلثاتی را تغییر ندهید و اگر با مضرب فردی از $\frac{\pi}{۲}$ همراه است، مطابق بند III، نام تابع مثلثاتی را تغییر دهید.

به حل مثال‌ها می‌پردازیم:

$$\sin ۱۳۰۵^\circ$$

در کمان ۱۳۰۵ درجه، چند دور کامل دایره وجود دارد؟

$$۱۳۰۵ = ۳ \times ۳۶۰ + ۲۲۵$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$\sin ۱۳۰۵^\circ = \sin(۳ \times ۳۶۰^\circ + ۲۲۵^\circ) = \sin ۲۲۵^\circ$$

۲۲۵ درجه برابر است با $۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ$:

$$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ)$$

کمان ۲۲۵ درجه در ربع سوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد و سینوس آن منفی است:

$$\sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

نام تابع مثلثاتی را تغییر ندادیم، چون ۴۵ درجه با ۱۸۰ درجه (یعنی مضربی از π) همراه بود.

پاسخ. $\sin ۱۳۰۵^\circ = -\frac{\sqrt{۲}}{۲}$.

۲) $\cos(۱۱\pi - \alpha)$. ابتدا ۱۰π (یعنی ۵ دور دایره) را کنار می‌گذاریم:

$$\cos(۱۱\pi - \alpha) = \cos(\pi - \alpha)$$

$(\pi - \alpha)$ در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی و کسینوس آن منفی است:

$$\cos(\pi - \alpha) = - \ldots$$

x با مضربی از π همراه است، نام کسینوس تغییر نمی‌کند:

$$\cos(\pi - \alpha) = - \cos\alpha$$

پاسخ. $\cos(11\pi - \alpha) = -\cos\alpha$.

۳) $\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{2} + \alpha\right)$. ابتدا $\frac{12\pi}{2} = 6\pi$ (یعنی سه دور دایره) را از کمان بیرون می‌کنیم:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{13\pi}{2} - \alpha\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot\alpha$$

α و $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ دو کمان متمم یکدیگرند.

۴) $\cot\left(x - \frac{7\pi}{2}\right)$. $\frac{4\pi}{2} = 2\pi$ (یعنی یک دور دایره) به کمان اضافه می‌کنیم:

$$\cot\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) = \cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$$

انتهای کمان $\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)$ در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی است (از مبداء کمان‌ها در روی دایرهٔ مثلثاتی، $-\frac{3\pi}{2}$ جلو می‌بریم، به مرز ربع‌های اول و دوم می‌رسیم، سپس به اندازهٔ α، که مثبت و حاده فرض می‌کنیم، جلو می‌بریم، به ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی می‌رسیم). در ربع دوم، کتانژانت منفی است و چون x با مضرب فردی از $\frac{\pi}{2}$ همراه است، کتانژانت به تانژانت تبدیل می‌شود:

$$\cot\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right) = \cot\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$۵)\ \sin\left(x-\frac{۹\pi}{۲}\right)=\sin\left(x-۴\pi-\frac{\pi}{۲}\right)=$$
$$=\sin\left(x-\frac{\pi}{۲}\right)=-\cos x;$$
$$۶)\ \mathrm{tg}(\alpha-۱۲۶۰^\circ)=\mathrm{tg}(\alpha-۱۸۰^\circ-۳\times ۳۶۰^\circ)=$$
$$=\mathrm{tg}(\alpha-۱۸۰^\circ)=\mathrm{tg}\alpha$$

۴۴. ضمن ساده کردن عبارت‌های مثلثاتی، وقتی کمان‌ها همراه با شرطی باشند، اغلب با از یاد بردن شرط، اشتباه پیش می‌آید. دو مساله را حل می‌کنیم.

مسالهٔ ۱. اگر A، B و C، زاویه‌های مثلثی باشند، این عبارت را به صورت ضرب عامل‌ها تجزیه کنید.

$$x=\cos A+\cos B+\cos C-۱$$

حل. به ترتیب داریم:

$$x=(\cos A+\cos B)-(۱-\cos C)=$$
$$=۲\cos\frac{A+B}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}-۲\sin^۲\frac{C}{۲}$$

$(A+B)$ مکمل C، بنابراین $\frac{A+B}{۲}$ متمم $\frac{C}{۲}$ است، یعنی $\cos\frac{A+B}{۲}$ با $\sin\frac{C}{۲}$ برابر است؛ پس

$$x=۲\sin\frac{C}{۲}\cos\frac{A-B}{۲}-۲\sin^۲\frac{C}{۲}=$$
$$=۲\sin\frac{C}{۲}\left(\cos\frac{A-B}{۲}-\sin\frac{C}{۲}\right)$$

برای این که داخل پرانتز قابل تجزیه باشد، به جای $\sin\frac{C}{۲}$ در داخل پرانتز، $\cos\frac{A+B}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$x = ۲\sin\frac{C}{۲}\left(\cos\frac{A-B}{۲} - \cos\frac{A+B}{۲}\right) =$$
$$= ۲\sin\frac{C}{۲}\left[-۲\sin\frac{(A-B)+(A+B)}{۴}\sin\frac{(A-B)-(A+B)}{۴}\right] =$$
$$= ۲\sin\frac{C}{۲}\left[-۲\sin\frac{A}{۲}\sin\left(-\frac{B}{۲}\right)\right] =$$
$$= ۴\sin\frac{A}{۲}\sin\frac{B}{۲}\sin\frac{C}{۲}$$

مسالهٔ ۲. اگر بدانیم $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{۲}$، به شرط حاده و مثبت بودن زاویه‌های α، β و γ، به‌ازای چه مقدارهایی از α، β و γ، عبارت زیر به حداکثر مقدار خود می‌رسد:

$$Z = \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma$$

حل. در آغاز به یک قضیه مشهور جبر اشاره می‌کنیم.

قضیه. اگر سه مقدار متغیر و مثبت x، y و z، مجموع ثابتی داشته باشند، حاصل ضرب آن‌ها، وقتی به حداکثر مقدار خود می‌رسد که، این سه مقدار با هم برابر باشند.

مثلاً اگر $x + y + z = a$ ($x > ۰$، $y > ۰$ و $z > ۰$)، آن‌وقت بیشترین مقدار حاصل‌ضرب xyz وقتی به دست می‌آید که داشته باشیم:

$$x = y = z = \frac{a}{۳}$$

که در این صورت، حاصل ضرب xyz برابر $\frac{۱}{۲۷}a^۳$ می‌شود که بیشترین مقدار ممکن، برای این حاصل ضرب است.

یکی از راه‌های اثبات این قضیه، استفاده از نابرابری میانگین‌ها، برای سه عدد مثبت است.

$$\sqrt[۳]{xyz} \leq \frac{x+y+z}{۳} = \frac{a}{۳};$$

$$xyz \leq \frac{a^۳}{۲۷}$$

علامت برابری، در این نابرابری وقتی برقرار است که سه مقدار x و y و z با هم برابر باشند، که در این صورت، حاصل ضرب آن‌ها برابر $\frac{a^۳}{۲۷}$، بیشترین مقدار حاصل ضرب، می‌شود.

به حل مسالهٔ ۲ می‌پردازیم. اگر از دو طرف برابری

$$\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{۲}$$

کتانژانت بگیریم، به دست می‌آید:

$$\frac{۱ - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma}{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\gamma - \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma} = ۰$$

کسری برابر صفر است که صورت آن برابر صفر باشد. بنابراین شرط مساله را می‌توان این طور نوشت:

$$\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta + \mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma + \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma = ۱ \qquad (۱)$$

مساله، حداکثر مقدار $Z = \mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma$ را خواسته است داریم:

$$Z^۲ = \mathrm{tg}^۲\alpha\mathrm{tg}^۲\beta\mathrm{tg}^۲\gamma = (\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta)(\mathrm{tg}\beta\mathrm{tg}\gamma)(\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\gamma)$$

می‌خواهیم، حاصل ضرب سه مقدار، به حداکثر خود برسد؛ ولی این سه مقدار، بنا به (۱)، مجموعی ثابت دارند، پس برای حداکثر شدن حاصل ضرب، باید داشته باشیم:

$$\text{tg}\alpha\text{tg}\beta = \text{tg}\beta\text{tg}\gamma = \text{tg}\alpha\text{tg}\gamma$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\text{tg}\alpha = \text{tg}\beta = \text{tg}\gamma \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{۶}$$

حداکثر مقدار ممکن، بری حاصل ضرب $\text{tg}\alpha\text{tg}\beta\text{tg}\gamma$، برابر است با

$$\text{tg}\frac{\pi}{۶} \cdot \text{tg}\frac{\pi}{۶} \cdot \text{tg}\frac{\pi}{۶} = \left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)^{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۹}$$

۴۵. تقریباً همهٔ دانش‌آموزان، در مشتق گرفتن از تابع‌های مثلثاتی، وقتی کمان با واحد درجه بیان شده باشد، اشتباه می‌کنند. برای $y = \sin x^{\circ}$، برخی می‌نویسند:

$$y' = \cos x^{\circ}$$

و برخی دیگر، با دیدن نشانهٔ درجه روی x، آن را مقدار ثابت به حساب می‌آورند و می‌نویسند:

$$y' = ۰$$

در درجهٔ اول، همیشه به یاد داشته باشید، وقتی می‌نویسیم $\sin x$ یا $\text{tg}\alpha$ و برای x و α، نشانهٔ درجه یا گراد نگذاشته‌ایم، منظور سینوس x رادیان و تانژانت α رادیان است.

در درجهٔ دوم، ببینیم، چرا مشتق $y = \sin x$ (یعنی سینوس x رادیان) برابر $y' = \cos x$ می‌شود. اگر به استدلالی که منجر به این نتیجه‌گیری

می‌شود، مراجعه کنید، متوجه می‌شوید که از دستور

$$\underset{x\to ۰}{\text{حد}}\left(\frac{\sin x}{x}\right)=۱$$

استفاده شده است. $\frac{\sin x}{x}$ یک نسبت است. نسبت وقتی معنی دارد که، دو جملهٔ آن، با یک واحد بیان شده باشند. واحد $\sin x$، شعاع دایرهٔ مثلثاتی است: وقتی می‌گوییم سینوس $\frac{\pi}{۶}$ برابر $\frac{۱}{۲}$ است، یعنی برابر $\frac{۱}{۲}$ شعاع دایره‌ای است که $\sin\frac{\pi}{۶}$ در آن رسم شده است. بنابراین، x هم باید با واحد شعاع دایره بیان شده باشد، یعنی رادیان (هر رادیان، کمانی است که طول آن، برابر طول شعاع دایره باشد).

به این ترتیب، برای این که بتوانیم از دستور

$$y=\sin x\Rightarrow y'=\cos x$$

استفاده کنیم، باید کمان x بر حسب رادیان باشد.

x درجه برابر است با $\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right)$ رادیان و

$$y=\sin x^{\circ}=\sin\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y'=\frac{\pi}{۱۸۰}\cos\left(\frac{\pi}{۱۸۰}x\right)=\frac{\pi}{۱۸۰}\cos x^{\circ}$$

مشتق $y=\sin x^{\circ}$ برابر $y'=\frac{\pi}{۱۸۰}\cos x^{\circ}$ می‌شود، یعنی به تقریب $\frac{۱}{۶۰}\cos x^{\circ}$.

۴۶. با توجه به دستور

$$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{۱}{۱+x^{۲}}$$

همه می‌دانند که

$$\int \frac{dx}{۱+x^۲} = \mathrm{arctg}x + c$$

ولی اگر با انتگرال‌هایی مثل

$$\int \frac{dx}{۴+x^۲} \text{ و } \int \frac{dx}{۳+۲x^۲} \text{ و } \int \frac{dx}{x^۲-x+۱}$$

روبه‌رو شوند، از محاسبهٔ آن‌ها در می‌مانند. این انتگرال‌ها را در این‌جا محاسبه می‌کنیم:

$$۱)\ \int \frac{dx}{۴+x^۲} = \int \frac{\frac{۱}{۴}dx}{۱+\frac{۱}{۴}x^۲} = \frac{۱}{۴}\int \frac{dx}{۱+\left(\frac{۱}{۲}x\right)^۲}$$

اگر فرض کنیم $u = \frac{۱}{۲}x$، به دست می‌آید:

$$du = \frac{۱}{۲}dx \Rightarrow dx = ۲du$$

و برای انتگرال خواهیم داشت:

$$\int \frac{dx}{۴+x^۲} = \frac{۱}{۴}\int \frac{۲du}{۱+u^۲} = \frac{۱}{۲}\int \frac{du}{۱+u^۲} =$$

$$= \frac{۱}{۲}\mathrm{arctg}u + c = \frac{۱}{۲}\mathrm{arctg}\left(\frac{x}{۲}\right) + c$$

$$۲)\ \int \frac{dx}{۳+۲x^۲} = \int \frac{\frac{۱}{۳}dx}{۱+\frac{۲}{۳}x^۲} = \frac{۱}{۳}\int \frac{dx}{۱+\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}x\right)^۲}$$

با فرض $u = \sqrt{\frac{۲}{۳}}x$، به دست می‌آید:

$$du = \sqrt{\frac{۲}{۳}}dx \Rightarrow dx = \sqrt{\frac{۳}{۲}}du$$

و بنابراین

$$\int \frac{dx}{۳ + ۲x^{۲}} = \frac{۱}{۳}\int \frac{\sqrt{\frac{۳}{۲}}du}{۱ + u^{۲}} = \frac{\sqrt{۳}}{۳\sqrt{۲}}\text{arctg}u + c =$$

$$= \frac{\sqrt{۶}}{۶}\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{۲}{۳}}x\right) + c$$

$$۳)\ I = \int \frac{dx}{x^{۲} - x + ۱} = \int \frac{dx}{\frac{۳}{۴} + \left(x - \frac{۱}{۲}\right)^{۲}} =$$

$$= \frac{۴}{۳}\int \frac{dx}{۱ + \frac{۴}{۳}(x - ۱)^{۲}} = \frac{۴}{۳}\int \frac{dx}{۱ + \left(\frac{۲}{\sqrt{۳}}x - \frac{۲}{\sqrt{۳}}\right)^{۲}}$$

$u = \frac{۲}{\sqrt{۳}}x - \frac{۲}{\sqrt{۳}}$ می‌گیریم. بنابراین

$$du = \frac{۲}{\sqrt{۳}}dx \Rightarrow dx = \frac{\sqrt{۳}}{۲}du;$$

$$I = \frac{۴}{۳}\int \frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}du}{۱ + u^{۲}} = \frac{۴}{۳} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲}\text{arctg}u + c =$$

$$= \frac{۲\sqrt{۳}}{۳}\text{arctg}\frac{۲(x - ۱)}{\sqrt{۳}} + c$$

۳. هندسه

بیشتر اشتباه‌هایی که در حل مساله‌های هندسی پیش می‌آید، مربوط به عدم دقت در رسم شکل و عدم درک صورت مساله است. ولی بحث در این دو زمینه، به درازا می‌کشد و باید در یک کتاب جداگانه، به آن‌ها پرداخته شود. در این‌جا، تنها به برخی اشتباه‌های ساده که بیشتر مربوط به اشتباه در تشخیص قضیه‌ها و یا تعریف‌های لازم، برای حل مساله است، اشاره می‌کنیم.

۴۷. نداشتن آگاهی کامل از قضیه‌های اساسی هندسه، می‌تواند منجر به اشتباه‌های جدی شود. مثلاً، شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث متساوی‌الساقین، به کمک دستور مربوط به محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع معین شود؛ سطح جانبی هرم غیر مشخص، به یاری دستور مربوط به سطح جانبی هرم منتظم محاسبه شود؛ به جای حجم قطعه کره، حجم قطاع کروی در نظر گرفته شود و ... همچنین، به این اشتباه‌ها، در برگ‌های امتحانی برخورد شده است:

مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را، نقطهٔ برخورد میانه‌ها یا نیمسازها گرفته‌اند.

نیمساز زاویه‌ای از مثلث متساوی‌الساقین که بین قاعده و یکی از ساق‌ها قرار دارد، منطبق بر میانهٔ مثلث به حساب آورده‌اند!

گمان کرده‌اند که، نیمسازهای مثلث متساوی‌الساقین، یکدیگر را به نسبت $\frac{1}{2}$ قطع کرده‌اند؛ شعاع کرهٔ محاط در یک هرم را برابر یک سوم ارتفاع هرم دانسته‌اند؛

گمان کرده‌اند، اگر کره‌ای در هرم محاط باشد، شعاعی از کره که به نقطهٔ تماس کره وصل شود، با قاعده موازی است.

در هر یک از این حالت‌ها، اشتباه را پیدا کنید. آیا می‌توانید با اندکی تغییر، یک قضیهٔ درست هندسی را جانشین قضیهٔ نادرست کنید؟

۴۸. یکی از اشتباه‌های رایج، درک نادرست شرط مساله است. مثلا، یک هرم منتظم با قاعدهٔ مربعی در نظر بگیرید. برای به دست آوردن مقدار زاویهٔ دووجهی بین وجه جانبی با صفحهٔ قاعده، برخی زاویهٔ بین یال جانبی با ضلع قاعده را در نظر می‌گیرند و برحی دیگر، آن را برابر زاویهٔ بین یال جانبی با قطر قاعده می‌دانند.

۴۹. در بسیاری حالت‌ها، راه حل کامل نیست: مطلب به یاری شکل روشن نشده است؛ گام‌هایی که برای حل برداشته شده است، همه‌جا منطقی و مستدل نیست؛ جواب مساله، در حالت‌های مختلفِ ممکن، مورد بررسی قرار نگرفته است.

۵۰. بسیار پیش آمده است که دانش‌آموز، طول پاره‌خط راست یا مقدار زاویه‌ای را که معلوم نیست،با حرفی مثل a یا x یا α نشان داده است و، بعد از انجام عمل‌هایی، جواب را بر حسب همین حرف به دست آورده، یعنی در واقع، مساله را حل نکرده است.

۵۱. برای خیلی از دانش‌آموزان، تصویر یک شکل فضایی دشوار است و، به دلیل نداشتن تصور فضایی، دچار اشتباه‌های جدی می‌شوند. مثلاً، به فراوانی دیده شده است که دانش‌آموز، جسم حاصل از دوران مثلث را، دور محوری که از راس موازی قاعده رسم شده است، یک استوانه پنداشته است. دانش‌آموز نتوانسته است زاویه بین قطر مکعب مستطیل را با وجه جانبی آن

پیدا کند، تنها به این علت که نمی‌تواند آن را در ذهن خود مجسم کند و یا، به همین علت، مسالهٔ مربوطه به محاسبهٔ زاویهٔ دووجهی بین دو وجه جانبی یک چهار وجهی، حل نشده باقی مانده است.

۵۲. رسم شکل، به ویژه در هندسهٔ فضایی، اهمیت جدی دارد: باید بتوان روی شکل، تصویر یک نقطه یا یک پاره‌خط راست را بر یک صفحه رسم و مجسم کرد؛ باید شکل طوری رسم شود که خط‌های راست موازی، در شکل، موازی درآیند و غیره. به خصوص وقتی بخواهیم یک شکل فضایی را در شکل فضایی دیگری محاط کنیم، باید بیشتر از هر زمان دیگر دقت به کار بریم.

۴. مساله‌ها

در این بخش، مساله‌هایی برای حل داده شده است. این‌ها، مساله‌هایی هستند که در مسابقهٔ ورودی یکی از دانشکده‌ها حرفه‌ای جهان، در چند سال پیاپی داده شده است. پاسخ این مساله‌ها، در پایان همین بخش داده شده است. آن‌ها را حل کنید و جوابی را که به دست آورده‌اید با پاسخ کتاب مقایسه کنید. اگر نکته‌های ساده‌ای را که در این کتاب، دربارهٔ آن‌ها صحبت کرده‌ایم، با دقت مطالعه کرده باشید، بی‌شک از عهدهٔ حل این مساله‌ها برخواهید آمد.

نمونهٔ اول

۱. این عبارت را ساده کنید:

$$\left(\frac{x+۱}{x-۱}\sqrt{\frac{x-۱}{x+۱}}+\frac{x+۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}}\right):$$

$$:\left(\frac{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}-\frac{x-\sqrt{x^{۲}-۱}}{x+\sqrt{x^{۲}-۱}}\right)$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۲}[۱۸۴+۲^{x(x-۳)}]=\log_{۲}۲۵+۲$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$\sin^{۳} x \cos x - \cos^{۳} x \sin x = \frac{۱}{۴}$$

۴. سهم یک هرم منتظم با قاعدهٔ مربع، m واحد از ارتفاع هرم بزرگتر است و با آن، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی هرم.

۵. این عبارت را ساده کنید.

$$۲\mathrm{tg}۲۲۵^\circ \sin ۱۵۰^\circ + \sin^{۲}(۱۸۰^\circ + x) \cos ۱۸۰^\circ$$

نمونهٔ دوم

۱. این نامعادله را حل کنید:

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^{\log_{\frac{۱}{۴}}(x^{۲}-۳x+۱)} > ۱$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin^{۸} x + \cos^{۸} x = \frac{۱۷}{۳۲}$$

۳. در مخروط قائمی که، زاویهٔ مقطع آن در راس برابر α است، کره‌ای به شعاع برابر R محاط کرده‌ایم. مطلوب است حجم بخشی از مخروط که بین کره و راس مخروط واقع است.

نمونهٔ سوم

۱. آب از راه دو لوله وارد مخزن می‌شود. دو لوله با هم، مخزن خالی را در ۱۰ دقیقه پر می‌کنند. لولهٔ اول، مخزن خالی را ۴۸ ثانیه زودتر از حالتی

پر می‌کند که بخواهیم با لولهٔ دوم مخزن خالی را پر کنیم. هریک از لوله‌ها، در چه مدت می‌تواند به تنهایی مخزن خالی را پر کند؟

۲. این عبارت را ساده کنید:

$$\left[\left(\frac{a}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}-\sqrt{a}\right):\left(\frac{b\sqrt{a}}{a-\sqrt{ab}}+\sqrt{b}\right)-\right.$$
$$\left.-\left(\frac{a^{۲}+۶a+۹}{a^{۲}+a-۶}\right)^{-۱}\right]\frac{a+۳}{۵}$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$\sin^{۲}(x+\pi)=۲\sin(x+۳\pi),\ ۰\le x\le\pi$$

۴. صفحه‌ای عمود بر قاعدهٔ یک استوانه، استوانه را به نحوی بریده که کمانی برابر α از قاعده جدا شده است. طول قطر مقطع برابر d است، این قطر، با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای برابر β ساخته است. حجم استوانه را پیدا کنید.

نمونهٔ چهارم

۱. صورت کسری برابر است با ۸. اگر ۳ واحد از مخرج کسر مجهول کم کنیم، به اندازهٔ ۳/۵ از کسری که با اضافه کردن ۱۱ واحد به مخرج کسر مجهول به دست می‌آید، بیشتر می‌شود. کسر مجهول را پیدا کنید.

۲. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} x+xy^{۲}=۱۰ \\ x-xy=۱۶ \end{cases}$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$\cos x-\cos ۲x=۱$$

۴. در یک هرم منتظم با قاعدهٔ مربع، سطح جانبی برابر ۱۶ است و هر وجه جانبی با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای برابر ۶۰ درجه می‌سازد. حجم هرم را پیدا کنید.

نمونهٔ پنجم

۱. فاصلهٔ بین دو ایستگاه A و B برابر ۳۰۰ کیلومتر است. دو قطار یکی از A و دیگری از B، در یک زمان به طرف یکدیگر حرکت می‌کنند. اولی که از A حرکت کرده بود، یک ساعت و نیم زودتر از وقتی که دومی به A رسید، به B رسیده است. می‌دانیم، وقتی اولی ۲۵۰ کیلومتر پیموده بود، دومی به ۲۰۰ کیلومتری آغاز حرکت خود رسیده بود. سرعت هریک از قطارها را پیدا کنید.

۲. این دستگاه معادله‌های را حل کنید:

$$\begin{cases} ۸^{\frac{۲x}{۲y}} - ۳۲ \times ۸^{\frac{y}{x}} = ۰ \\ ۳^{\frac{x}{y}} - \frac{۱}{۳} \times ۹^{\frac{۱}{y}} = ۰ \end{cases}$$

۳. اگر α، β و γ زاویه‌های داخلی یک مثلث باشند، ثابت کنید:

$$\cot\alpha + \cot\beta + \cot\gamma = \cot\alpha\cot\beta\cot\gamma$$

۴. زاویه‌های حادهٔ مثلثی برابر α و β و زاویهٔ سوم آن منفرجه است. مثلث را دور ضلع روبه‌رو به زاویهٔ β دوران داده‌ایم. سطح جسم حاصل از دوران را پیدا کنید، به شرطی که طول کوچکترین ارتفاع مثلث برابر h باشد.

نمونهٔ ششم

۱. از دو راس یک مستطیل، عمودهایی بر قطر آن رسم کرده‌ایم. پای عمودها، قطر را به سه بخش برابر تقسیم کرده‌اند. اگر طول مستطیل برابر $\sqrt{۲}$ باشد، عرض آن را پیدا کنید.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\frac{1+\operatorname{tg}(x-3\pi)}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{2}-x\right)}=2\sin x$$

۳. جملهٔ ششم یک تصاعد حسابی برابر ۶ و مجموع جمله‌های دوم و پنجم آن برابر ۳ شده است. مجموع هفت جملهٔ اول تصاعد را پیدا کنید.

۴. این معادله را حل کنید:

$$\frac{1}{2}\lg(x^2-10x+25)+\lg(x^2-6x+3)=$$
$$=2\lg(x-5)+\frac{1}{2}\lg 5$$

۵. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\operatorname{tg}2\alpha+\sec 2\alpha=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$$

نمونهٔ هفتم

۱. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}-8a^{\frac{1}{3}}b}{a^{\frac{2}{3}}+2\sqrt[3]{ab}+4b^{\frac{2}{3}}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right)-a^{\frac{2}{3}}$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$3^x\cdot 2^{x-1}-3^{x-1}\cdot 2^x=2^2\cdot 3^2$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$2\sin^2 x-7\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$$

۴. مثلث با ضلع‌های به طول ۹، ۱۰ و ۱۷ سانتی‌متر را، دور ارتفاعی که از راس زاویهٔ کوچکتر گذشته است، دوران داده‌ایم. حجم جسم دوار را پیدا کنید.

نمونهٔ هشتم

۱. این عبارت را ساده کنید:

$$\left(\frac{۴a-۹a^{-۱}}{۲a^{\frac{۱}{۲}}-۳a^{-\frac{۱}{۲}}}+\frac{a-۴+۳a^{-۱}}{a^{\frac{۱}{۲}}-a^{-\frac{۱}{۲}}}\right)^{۲}$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\lg ۱۰^{\lg(x^{۲}+۲۱)}-۱=\lg x$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{۴}+x\right)+\operatorname{tg}x-۲=۰$$

۴. زاویهٔ بین دو ساق در مثلث متساوی‌الساقینی که مساحتی برابر S دارد، برابر است با α. این مثلث را، دور خط راستی که در یک انتهای قاعده بر آن عمود شده است، دوران داده‌ایم. حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

نمونهٔ نهم

۱. این عبارت را ساده کنید:

$$\left[(۱-x)^{-\frac{۲}{۳}}+\frac{x}{\sqrt[۳]{(۱-x)^{۵}}}\right]:$$
$$:\left[\left(۱-\frac{۲}{x^{-۱}}+\frac{۱}{x^{-۲}}\right)^{-۱}\cdot\sqrt[۳]{۱-x}\right]$$

۲. این نامعادله را حل کنید:

$$\lg(x+۳)+\lg x<\lg(x+۸)$$

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \sin^۲ x+\sin^۲ y=\frac{۳}{۴} \\ x+y=۷۵^\circ \end{cases}$$

۴. قطر d از یک مکعب مستطیل، با وجه جانبی، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. مقطعی که از این قطر و یال جانبی می‌گذرد، با همان وجه جانبی، زاویهٔ دو وجهی β را تشکیل می‌دهد. مطلوب است محاسبهٔ سطح جانبی مکعب مستطیل.

نمونهٔ دهم

۱. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} ۲^{\sqrt{x}+\sqrt{y}}=۵۲ \\ \lg\sqrt{xy}=۱+\lg ۲ \end{cases}$$

۲. مُدول این عدد مختلط را پیدا کنید:

$$(۲+۳i)(۵-۴i)$$

یادداشت. $i=\sqrt{-۱}$. مُدول یا کالبد عدد مختلط $x+yi$، چنین است:

$$|x+yi|=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

۳. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

$$\frac{۲(\sin ۲\alpha+۲\cos^۲\alpha-۱)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos ۳\alpha+\sin ۳\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha$$

۴. قاعدهٔ یک هرم، متوازی‌الاضلاعی است که، قطرهای آن، زاویه‌ای برابر α با هم ساخته‌اند. ارتفاع هرم از نقطهٔ برخورد قطرهای قاعده می‌گذرد و طولی برابر H دارد. یال‌های نابرابر جانبی، با صفحهٔ قاعده، زاویه‌هایی برابر β و γ می‌سازند. حجم هرم را پیدا کنید.

نمونهٔ یازدهم

۱. در قاعدهٔ مخروط، مربعی با ضلع به طول a محاط کرده‌ایم. صفحه‌ای را از راس مخروط و یکی از ضلع‌های مربع گذرانده‌ایم، این صفحه در برخورد با سطح مخروط،مثلثی با زاویهٔ راس برابر α تشکیل داده است: حجم مخروط را پیدا کنید.

۲. این معادله را حل کنید:

$$۳^{۴x+۸} - ۴ \times ۳^{۲x+۵} + ۲۷ = ۰$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$۳(۱ - \sin x) = ۱ + \cos ۲x$$

نمونهٔ دوازدهم

۱. ترمیم جاده‌ای را به دو گروه واگذار کردند. هر گروه ۱۰ کیلومتر جاده را مرمت کرد؛ ولی گروه دوم، یک روز کمتر از گروه اول کار کرد. هر گروه، چند کیلومتر را در یک روز مرمت می‌کند، به شرطی که بدانیم، دو گروه در یک روز، روی هم، ۴/۵ کیلومتر از جاده را ترمیم می‌کنند؟

۲. این معادله را حل کنید:

$$\log_{۷}\left(۲x - \frac{۹}{۴}\right) - \log_{۷} x = \log_{۷}(x - ۳) + ۱$$

۳. به ضرب تبدیل کنید:

$$\frac{\operatorname{cosec}\alpha - \sin\alpha - \sec\alpha + \cos\alpha}{۱ + \sin\alpha\cos\alpha}$$

۴. مثلث را دور ضلعی که مجاور زاویه‌های برابر α و β است، دوران داده‌ایم. سطح جسم حاصل را به دست آورید، به شرطی که ضلع روبه‌روی به زاویهٔ α از مثلث، طولی برابر a داشته باشد.

نمونهٔ سیزدهم

۱. محاسبه کنید:

$$\frac{\left(۳/۴ + ۱\frac{۵}{۷}\right) \times ۱۱\frac{۲}{۳}}{۱\frac{۲}{۹} - ۱\frac{۱}{۱۸}} - \frac{۱۰/۷۵ - ۱\frac{۵}{۶}}{\left(۵\frac{۳}{۲۰} - ۴/۲۵\right) \times ۱\frac{۱}{۹}}$$

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt{۳}\sin x + ۳\cos x = ۰$$

۳. معادله را حل کنید:

$$x + \lg(۱ + ۲^{x}) = x\lg۵ + \lg۶$$

۴. در یک هرم منتظم به صورت چهار وجهی، هر یال جانبی طولی برابر b دارد و با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. سطح کرهٔ محیط بر این هرم را پیدا کنید.

نمونهٔ چهاردهم

۱. به‌ازای چه مقداری از k، عکس ریشه‌های معادلهٔ

$$x^{۲} + kx - ۲۴ = ۰$$

مجموعی برابر $-\frac{۵}{۲۴}$ دارند؟

۲. این عبارت را ساده کنید:

$$\cos ۴\alpha - \frac{۱ - \mathrm{tg}^{۲} ۲\alpha}{۱ + \mathrm{tg}^{۲} ۲\alpha}$$

۳. این معادله‌ها را حل کنید:

$$\text{a)}\ ۳\sec^{۲} x - ۸\mathrm{tg}x + ۲ = ۰$$

$$\text{b)}\ ۶^{x+۴} = ۲^{x+۸} \times ۳^{۳x}$$

۴. در یک هرم منتظم چهار وجهی، هر یال جانبی طولی برابر a دارد و با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α می‌سازد. حجم هرم را پیدا کنید.

نمونهٔ پانزدهم

۱. دو نفر، هر کدام تعدادی سیب داشتند، ولی بعد از فروش سیب‌ها، پول دو نفر برابر شد. اگر اولی، سیب‌ها را به قیمت دومی می‌فروخت ۸۰ تومان به دست می‌آورد. و اگر دومی به قیمت اولی می‌فروخت، ۱۲۵ تومان به دست می‌آورد. اگر تعداد سیب‌های دومی ۱۲ عدد، بیش از تعداد سیب‌های اولی باشد، هرکدام چند سیب داشته‌اند؟

۲. این عبارت را به صورتی تبدیل کنید که قابل محاسبهٔ لگاریتمی باشد:

$$۱ + \sin \alpha + \cos \alpha + \mathrm{tg}\alpha$$

۳. این دستگاه را حل کنید:

$$\begin{cases} y + \lg x = ۱ \\ x^y = \dfrac{۱}{۱۰۰} \end{cases}$$

۴. قاعدهٔ هرم، یک لوزی با ضلع به طول a است. دو وجه جانبی هرم، بر صفحهٔ قاعده عمودند و با هم، زاویهٔ منفرجهٔ β را ساخته‌اند. دو وجه جانبی دیگر هرم، با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α ساخته‌اند. مساحت سطح جانبی هرم را پیدا کنید.

نمونهٔ شانزدهم

۱. کرایهٔ یک تن بار بین دو شهر، از طریق راه آهن، ۲۰۰ ریال بیش از کرایهٔ آن از طریق آب است. چند تن بار می‌توان از طریق راه‌آهن با یک میلیون ریال بین ان دو شهر جابه‌جا کرد، به شرطی که بدانیم، با همین مبلغ، بتوان از طریق آب، ۲۵۰ تن بیشتر جابه‌جا کرد؟

۲. این عبارت را ساده کنید:

$$\frac{\left(\dfrac{\sqrt[۴]{x^۳ y} - x}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \dfrac{۱}{\sqrt{x^{-۱}}}\right)\left(\sqrt[۴]{xy} + \sqrt{y}\right)}{x + y - (x\sqrt{x} + y\sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})^{-۱}}$$

۳. این معادله را حل کنید:

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} ۲x = \sin ۳x \cos x$$

۴. قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائمی، متوازی‌الاضلاعی است با زاویهٔ منفرجه α و ضلع‌های با طول‌های a و b. قطر کوچکتر متوازی‌السطوح برابر است با قطر بزرگتر قاعده. حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۵. حل سه نمونه از مساله‌های مسابقه‌ای

نمونهٔ اول

۱. این عبارت را ساده کنید؛ با شرط $x \geq ۰$

$$\frac{x^{\frac{۱}{۴}} - ۱}{x^{\frac{۱}{۴}} + ۱} \cdot \frac{\sqrt{x - ۲\sqrt{x} + ۱}}{\sqrt{x} - ۲\sqrt[۴]{x} + ۱} + ۳$$

حل. حاصل عبارت را A می‌نامیم. داریم:

$$A = \frac{\sqrt[۴]{x} - ۱}{\sqrt[۴]{x} + ۱} \cdot \frac{\sqrt{(\sqrt{x} - ۱)^۲}}{(\sqrt[۴]{x} - ۱)^۲} + ۳ = \frac{(\sqrt[۴]{x} - ۱) \cdot |\sqrt{x} - ۱|}{(\sqrt[۴]{x} + ۱) \cdot (\sqrt[۴]{x} - ۱)^۲} + ۳ =$$

$$= \frac{|\sqrt{x} - ۱|}{\sqrt{x} - ۱} + ۳ = \begin{cases} ۴ & (x > ۱) \\ ۲ & (۰ \leq x < ۱) \end{cases}$$

عبارت به‌ازای $x = ۱$ معنا ندارد.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\log_۲(۴^x + ۴) = x + \log_۲(۲^{x+۱} + ۳)$$

حل. مجهول معادله می‌تواند هر عدد حقیقی را بپذیرد: $x \in \mathbf{R}$. معادله را می‌توان به این صورت نوشت:

$$\log_۲(۴^x + ۴) = \log_۲(۲^x) + \log_۲(۲^{x+۱} + ۳)$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$\log_۲(۴^x + ۴) = \log_۲[۲^x(۲^{x+۱} + ۳)]$$

بنابراین، به ترتیب داریم:

$$۴^x + ۴ = ۲^x(۲^{x+۱} + ۳);$$
$$۲^{۲x} + ۴ = ۲^{۲x} \times ۲ + ۳ \times ۲^x;$$
$$۲^{۲x} + ۳ \times ۲^x - ۴ = ۰$$

که با فرض $Z = ۲^x$، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$Z^۲ + ۳Z - ۴ = ۰ \Rightarrow Z_۱ = -۴, =; Z_۲ = ۱$$

روشن است که، $۲^x \neq -۴$، پس

$$۲^x = ۱ \Rightarrow ۲^x = ۲^۰ \Rightarrow x = ۰$$

ضمن حل معادله، یک بار از دو طرف برابری «آنتی لگاریتم» گرفتیم، ولی این عمل دامنهٔ تغییر x را ثابت نگه می‌دارد و معادلهٔ حاصل، هم‌ارز معادلهٔ مفروض است. بنابراین، در این‌جا آزمایش جواب لازم نیست (گرچه آزمایش هم، درستیِ جواب را نشان می‌دهد).

۳. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x + \cot y = ۲ \\ \cot x + \mathrm{tg}y = ۲ \end{cases}$$

حل. دو طرف معادلهٔ اول را در $\mathrm{tg}y$ و دو طرف معادلهٔ دوم را در $\mathrm{tg}x$ ضرب می‌کنیم، به دست می‌آید:

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y + ۱ = ۲\mathrm{tg}y \\ \mathrm{tg}x\mathrm{tg}y + ۱ = ۲\mathrm{tg}x \end{cases}$$

معادلهٔ دوم این دستگاه را از معادلهٔ اول آن کم می‌کنیم:

$$\mathrm{tg}y - \mathrm{tg}x = ۰ \Rightarrow \mathrm{tg}x = \mathrm{tg}y$$

دو کمان، تانژانت‌هایی برابر دارند، بنابراین

$$x - y = k\pi \Rightarrow x = k\pi + y$$

و با قرار دادن مقدار x در معادلهٔ اول دستگاه، به ترتیب خواهیم داشت:

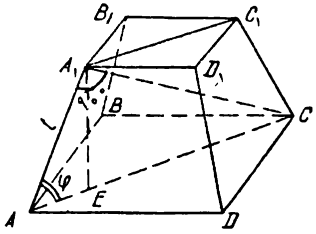
$$\cot(k\pi + y) + \mathrm{tg}y = ۲;$$
$$\cot y + \mathrm{tg}y = ۲;\ \mathrm{tg}^۲ y - ۲\mathrm{tg}y + ۱ = ۰$$
$$\mathrm{tg}y = ۱;\ y = n\pi + \frac{\pi}{۴}$$

و از برابری $x = k\pi + y$، مقدار x به دست می‌آید:

$$x = n\pi + \frac{\pi}{۴} + k\pi = (n+k)\pi + \frac{\pi}{۴} = m\pi + \frac{\pi}{۴}$$

پاسخ. $x = (۴m + ۱)\frac{\pi}{۴}$ و $y = (۴n + ۱)\frac{\pi}{۴}$؛ $m \in \mathbf{Z}$ و $n \in \mathbf{Z}$.

۴. در یک هرم ناقص منتظم که چهار وجه جانبی دارد، پاره‌خط راست منطبق بر قطر، بر یال جانبی هرم عمود است و طولی برابر l دارد. اگر هر



شکل ۷:

یال جانبی با صفحهٔ قاعده زاویه‌ای برابر φ بسازد، حجم هرم ناقص را پیدا کنید.

بررسی مساله به کمک شکل. هرم ناقص AC_1 منتظم است، بنابراین، قاعده‌های آن مربع‌اند. اگر مقطع قطری هرم را پیدا کنیم، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین AA_1C_1C به دست می‌آید که، صفحهٔ آن، بر صفحهٔ قاعده عمود است (شکل ۷). بنابراین، A_1E ارتفاع هرم و A_1C قطر هرم، بر صفحهٔ ذوزنقهٔ AA_1C_1C قرار دارند. پای ارتفاع A_1E، یعنی نقطهٔ E، روی AC، قطر قاعدهٔ هرم واقع است. بنا به شرط مساله، A_1C بر AA_1 عمود است، یعنی

$$\widehat{AA_1C} = ۹۰^\circ$$

زاویهٔ بین یال جانبی هرم، یعنی AA_1، با قاعدهٔ هرم، همان زاویه‌ای است که این یال با تصویر خود بر قاعدهٔ هرم تشکیل می‌دهد، یعنی زاویهٔ A_1AE.

داده‌های مساله: $|A_1A| = l$؛ $\widehat{A_1AC} = \varphi$؛ $(CA)\perp(AA_1)$.

با این داده‌ها، باید حجم هرم ناقص، بنا بر دستور

$$V = \frac{۱}{۳}h(Q + q + \sqrt{Qq})$$

به دست آید که، در آن، h طول ارتفاع هرم، Q مساحت قاعدهٔ پایین و q

مساحت قاعدهٔ بالای هرم است. در ضمن، برای سادگی کار، فرض می‌کنیم:

$$|A_۱E| = h,\ |AB| = a,\ |A_۱B_۱| = b$$

۱) ارتفاع هرم را به یاری مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA_۱E$ به دست می‌آوریم:

$$h = l \sin \varphi$$

۲) برای محاسبهٔ مساحت‌های قاعده‌ها، در مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA_۱C$:

$$|AC| = \frac{l}{\cos \varphi}$$

و در مثلث قائم‌الزاویه ACD:

$$|AC| = a\sqrt{۲}$$

بنابراین

$$\frac{l}{\cos \varphi} = a\sqrt{۲} \Rightarrow a = \frac{l}{\sqrt{۲} \cos \varphi}$$

به این ترتیب، مساحت قاعدهٔ پایینِ هرم به دست می‌آید:

$$Q = a^۲ = \frac{l^۲}{۲ \cos^۲ \varphi}$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ $A_۱C_۱D_۱$:

$$|A_۱C_۱| = b\sqrt{۲}$$

ولی $|A_۱C_۱| = |AC| - ۲|AE|$ و $|AE| = l \cos \varphi$. بنابراین

$$b\sqrt{۲} = a\sqrt{۲} - ۲l \cos \varphi = \frac{l}{\cos \varphi} - ۲l \cos \varphi =$$
$$= l \cdot \frac{۱ - ۲ \cos^۲ \varphi}{\cos \varphi} = -\frac{l \cos ۲\varphi}{\cos \varphi}$$

و از آن‌جا

$$b = -\frac{l \cos ۲\varphi}{\sqrt{۲} \cos \varphi}$$

و در نتیجه

$$q = b^۲ = \frac{l^۲ \cos^۲ ۲\varphi}{۲ \cos^۲ \varphi}$$

۳) اکنون می‌توانیم حجم هرم ناقص را بنویسیم:

$$V = \frac{۱}{۳} l \sin \varphi \left(\frac{l^۲}{۲ \cos^۲ \varphi} + \frac{l^۲ \cos^۲ ۲\varphi}{۲ \cos^۲ \varphi} - \frac{l^۲ \cos ۲\varphi}{۲ \cos^۲ \varphi} \right) =$$

$$= \frac{۱}{۳} l^۳ \sin \varphi \cdot \frac{۱ + \cos^۲ ۲\varphi - \cos ۲\varphi}{۲ \cos^۲ \varphi} =$$

$$= \frac{l^۳ \sin \varphi (۱ - \cos ۲\varphi + \cos^۲ ۲\varphi)}{۶ \cos^۲ \varphi} =$$

$$= \frac{l^۳ \sin \varphi (۱ - \cos ۲\varphi + \cos^۲ ۲\varphi)(۱ + \cos ۲\varphi)}{۶ \cos^۲ \varphi (۱ + \cos ۲\varphi)} =$$

$$= \frac{l^۳ \sin \varphi (۱ + \cos^۳ ۲\varphi)}{۶ \cos^۲ \varphi \cdot ۲ \cos^۲ \varphi} =$$

$$= \frac{l^۳ \sin \varphi (۱ + \cos^۳ ۲\varphi)}{۱۲ \cos^۴ \varphi}$$

تجزیه و تحلیل حل مساله. برای این که مساله جواب داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$۰^\circ < \varphi < ۹۰^\circ$$

و به‌ازای این مقدارهای φ، مساله تنها یک جواب دارد. اگر مقدار l را ثابت فرض کنیم، هر چه زاویهٔ φ کوچکتر باشد، حجم هرم ناقص کمتر می‌شود؛ و اگر φ را ثابت بگیریم، با بزرگتر شدن l، حجم هرم ناقص بیشتر می‌شود.

نمونهٔ دوم

۱. این دستگاه معادله‌ها را حل کنید:

$$\begin{cases} xy = ۴۰ \\ x^{\lg y} = ۴ \end{cases}$$

حل. مقدارهای قابل قبول برای مجهول‌ها، عبارتند از

$$x > ۰,\ x \neq ۱,\ y > ۰$$

با لگاریتم گرفتن از دو طرف هریک از معادله‌ها، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} \lg x + \lg y = \lg ۴۰ \\ \lg y \lg x = \lg ۴ \end{cases}$$

مجموع و حاصل ضرب $\lg x$ و $\lg y$ معلوم است، بنابراین ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

$$Z^۲ - \lg ۴۰ \cdot Z + \lg ۴ = ۰$$

هستند که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$Z = \frac{\lg ۴۰ \pm \sqrt{\lg^۲ ۴۰ - ۴\lg ۴}}{۲} = \frac{\lg ۴۰ \pm \sqrt{(\lg ۴ + \lg ۱۰)^۲ - ۴\lg ۴}}{۲} =$$

$$= \frac{\lg ۴۰ \pm \sqrt{(\lg ۴ + ۱)^۲ - ۴\lg ۴}}{۲} = \frac{\lg ۴۰ \pm \sqrt{(۱ - \lg ۴)^۲}}{۲} =$$

$$= \frac{\lg ۴ + ۱) \pm (۱ - \lg ۴)}{۲}$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$۱)\ \lg x = ۱ \Rightarrow x = ۱۰;\ \lg y = \lg ۴ \Rightarrow y = ۴;$$

$$۲)\ \lg x = \lg ۴ \Rightarrow x = ۴;\ \lg y = ۱ \Rightarrow y = ۱۰$$

پاسخ. $(10, 4)$، $(4, 10)$.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sin^2 x + \sin^2 2x - \sin^2 3x - \sin^2 4x = 0$$

حل. اگر از دستور تبدیل به کسینوس کمان دو برابر استفاده کنیم، به دست می‌آید:

$$\frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} - \frac{1 - \cos 6x}{2} - \frac{1 - \cos 8x}{2} = 0$$

از آن‌جا

$$\cos 2x + \cos 4x = \cos 6x + \cos 8x$$

با تبدیل هر طرف برابر به ضرب

$$2\cos 3x \cos x = 2\cos 7x \cos x;$$

$$(\cos 3x - \cos 7x)\cos x = 0$$

$$1)\ \cos x = 0 \Rightarrow x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2};$$

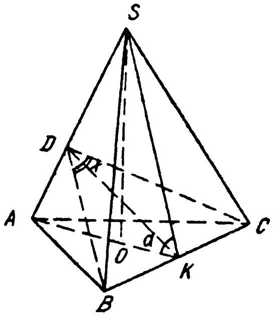
$$2)\ \cos 7x = \cos 3x \Rightarrow 7x \pm 3x = 2k\pi;$$

$$x_2 = \frac{1}{5}k\pi \text{ یا } x_3 = \frac{1}{2}k\pi$$

توجه کنیم، x_3 به‌ازای مقدارهای فرد $k(k = 2m + 1)$ بر x_1 و به‌ازای مقدارهای زوج k $(k = 2m)$ بر x_2، وقتی k را برابر $5m$ بگیریم، منطبق است.

پاسخ. $x_1 = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$ و $x_2 = \frac{1}{5}k\pi$.

۳. در هرمی منتظم با قاعدهٔ مثلثی، زاویهٔ دووجهی مجاور قاعده برابر است با α. مقدار زاویهٔ دووجهی بین دو وجه جانبی را پیدا کنید (شکل ۸).



شکل ۸:

بررسی مساله روی شکل. چند وجهی $SABC$، یک هرم منتظم است؛ بنابراین قاعدهٔ هرم، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است و SO، ارتفاع هرم از مرکز این مثلث می‌گذرد. در ضمن، وجه‌های جانبی ASB، ASC و BSC، مثلث‌هایی برابر و متساوی‌الساقین‌اند. از نقطهٔ S، عمود SK را بر BC (ضلع قاعده) رسم و نقطهٔ A را به K وصل می‌کنیم. AK و BC، بنا بر قضیهٔ سه عمود، بر هم عمودند و زاویهٔ SKA معرف زاویهٔ دووجهی با یال BC است:

$$\widehat{SKA} = \alpha,\ |BK| = |KC|$$

از خط راست BC، صفحهٔ BDC را عمود بر یال AS رسم می‌کنیم؛ در این صورت

$$(BD)\perp(AS),\ (CD)\perp(AS)$$

بنابراین، زاویهٔ BDC، معرف زاویهٔ دووجهی با یال AS است. این زاویه را x می‌نامیم. پاره‌خط‌های راست BD و CD، به عنوان ارتفاع‌های دو مثلث برابر، طول‌هایی برابر دارند. یعنی مثلث BDC متساوی‌الساقین است. اگر

پاره‌خط راست DK را رسم کنیم، داریم:

$$(DK)\perp(BC),\ \widehat{BDK}=\frac{x}{۲}$$

زیرا DK، میانه و نیمساز در مثلث متساوی‌الساقین BDC است.

حل. ۱) از مثلث قائم‌الزاویهٔ BDK به دست می‌آید:

$$\sin\frac{x}{۲}=\frac{|BK|}{|BD|}$$

۲) $|BK|$ و $|BD|$ را بر حسب $|KO|$ بیان می‌کنیم:

$$|KO|=\frac{۱}{۲}|AO|$$

که در آن، $|AO|$ طول شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC است.

$$|BC|=|AD|\sqrt{۳},\ |BK|=|KO|\sqrt{۳}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ KSO داریم:

$$|KS|=\frac{|KO|}{\cos\alpha}$$

و از مثلث قائم‌الزاویهٔ BSK:

$$|BS|=\sqrt{|KS|^{۲}+|BK|^{۲}}$$

به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$|AS|=|BS|=\sqrt{\frac{|KO|^{۲}}{\cos^{۲}\alpha}+۳|KO|^{۲}}=\frac{|KO|}{\cos\alpha}\sqrt{۱+۳\cos^{۲}\alpha}$$

چون مثلث‌های BSC و ASB برابرند، بنابراین مساحت‌هایی برابر دارند:

$$S_{ASB} = S_{BSC} = \frac{|BC| \cdot |KS|}{۲} = |BK| \cdot |KS| =$$

$$= |KO|\sqrt{۳} \cdot \frac{|KO|}{\cos \alpha} = \frac{|KO|^۲\sqrt{۳}}{\cos \alpha}$$

از طرف دیگر

$$S_{ASB} = \frac{|BC| \cdot |AS|}{۲}$$

از آن‌جا

$$|BD| = \frac{۲S_{ASB}}{|AS|};\ |BD| \frac{۲|KO|^۲ \cdot \sqrt{۳}\cos \alpha}{\cos \alpha |KO|\sqrt{۱ + ۳\cos^۲ \alpha}} =$$

$$= \frac{۲|KO|\sqrt{۳}}{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲ \alpha}}$$

۳) اکنون به سراغ محاسبهٔ زاویهٔ دووجهی مورد نظر می‌رویم:

$$\sin \frac{x}{۲} = \frac{|BK|}{|BD|} = \frac{|KO|\sqrt{۳} \cdot \sqrt{۱ + ۳\cos^۲ \alpha}}{۲|KO|\sqrt{۳}} = \frac{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲ \alpha}}{۲}$$

$\frac{x}{۲}$ زاویهٔ حادهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه است، بنابراین

$$x = ۲\arcsin \frac{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲ \alpha}}{۲}$$

تجزیه و تحلیل حل. مقدارهای قابل قبول α با این نابرابری مشخص می‌شوند:

$$۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$$

مساله، به‌ازای این مقدارهای α، همیشه جواب دارد و، تنها یک جواب. مقدار x هم، در بازهٔ $\left(۰, \frac{\pi}{۲}\right)$ به دست می‌آید. با بزرگتر شدن زاویه α، زاویهٔ x کوچکتر می‌شود.

پاسخ. $x = ۲\arcsin\frac{\sqrt{۱ + ۳\cos^۲\alpha}}{۲}$

نمونهٔ سوم

۱. مجموع رقم‌های یک عدد دورقمی برابر است با ۹. اگر جای رقم‌های عدد را عوض کنیم، نسبت عدد جدید به عدد اصلی برابر $\frac{۳}{۸}$ می‌شود. این عدد دورقمی را پیدا کنید.

حل. عدد دو رقمی را $\overline{xy}$ می‌گیریم (y، رقم یکان و x، رقم دهگان است):

$$\overline{xy} = ۱۰x + y$$

بنا به فرض مساله، به این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{cases} x + y = ۹ \\ \dfrac{۱۰y + x}{۱۰x + y} = \dfrac{۳}{۸} \end{cases}$$

y را از معادلهٔ اول بر حسب x محاسبه می‌کنیم و در معادلهٔ دوم دستگاه قرار می‌دهیم:

$$\frac{۱۰(۹ - x) + x}{۱۰x + (۹ - x)} = \frac{۳}{۸}$$

که پس از ساده کردن، مقدار x به دست می‌آید: $x = ۷$؛ و از آن‌جا $y = ۲$.

پاسخ: ۷۲.

۲. این معادله را حل کنید:

$$\sqrt[x-۱]{\sqrt[۳]{۲^{۳x-۱}}} - \sqrt[۴x-۷]{۳۲^{۰/۶x-۱/۸}} = ۰$$

حل. مقدارهای قابل قبول برای مجهول x، با شرطهای $x \neq ۱$ و $x \neq \frac{۷}{۳}$ معین می‌شوند. معادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\sqrt[x-۱]{۲^{\frac{۳x-۱}{۳}}} = \sqrt[۳x-۷]{۲^{۵(۰/۶x-۱/۸)}}$$

که از آن‌جا به این معادله می‌رسیم:

$$۲^{\frac{۳x-۱}{۳(x-۱)}} = ۲^{\frac{۳x-۹}{۳x-۷}}$$

چون توان‌های ۲ برابرند، بنابراین نماها با هم برابر می‌شوند:

$$\frac{۳x-۱}{۳(x-۱)} = \frac{۳x-۹}{۳x-۷} \Rightarrow x = \frac{۵}{۳}$$

۳. این نامعادله را حل کنید:

$$\lg\sqrt{x-۲} + ۰/۵\lg(۳x-۵) > \frac{۱}{۲}$$

حل. عبارت سمت چپِ نامعادله وقتی معنا دارد که داشته باشیم:

$$\begin{cases} x-۲ > ۰ \\ ۳x-۵ > ۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > ۲ \\ x > \frac{۵}{۳} \end{cases} \Rightarrow x > ۲$$

نامعادله را به این صورت می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{۲}\lg(x-۲) + \frac{۱}{۲}\lg(۳x-۵) > \frac{۱}{۲}$$

که بعد از ساده کردن به $\frac{۱}{۲}$ و تبدیل به لگاریتم حاصل ضرب، به دست می‌آید:

$$\lg[(x-۲)(۳x-۵)] > \lg۱۰$$

بنابراین، به نامعادلهٔ درجه دوم زیر می‌رسیم:

$$(x-۲)(۳x-۵)>۱۰ \Rightarrow x(۳x-۱۱)>۰$$

چون $x>۰$ ($x>۲$، شرط وجود معادله است)، پس

$$۳x-۱۱>۰ \Rightarrow x>\frac{۱۱}{۳}$$

۴. درستی این اتحاد را ثابت کنید:

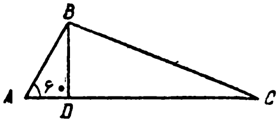
$$\sin^{۲}(\alpha+\beta)-\sin^{۲}\alpha-\sin^{۲}\beta=۲\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$$

حل. عبارت سمت چپ برابری را، به ترتیب، تبدیل می‌کنیم:

$$\begin{aligned}
&\sin^{۲}(\alpha+\beta)-\sin^{۲}\alpha-\sin^{۲}\beta=[۱-\cos^{۲}(\alpha+\beta)]-\\
&-\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲x)-\frac{۱}{۲}(۱-\cos ۲\beta)=\\
&=\frac{۱}{۲}(\cos ۲\alpha+\cos ۲\beta)-\cos^{۲}(\alpha+\beta)=\\
&=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos^{۲}(\alpha+\beta)=\\
&=\cos(\alpha+\beta)[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]=\\
&=\cos(\alpha+\beta)[(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)-\\
&-(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)]=\\
&=۲\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha\sin\beta
\end{aligned}$$

عبارت سمت چپ برابری، به عبارت سمت راست آن تبدیل شد، یعنی این برابری، یک اتحاد است.

۵. در مثلثی، مجموع دو ضلع برابر ۳۰ سانتی‌متر و طول قاعده برابر ۲۴ سانتی‌متر است. اگر یکی از زاویه‌های مجاور قاعده برابر ۶۰ درجه



شکل ۹ :

باشد، طول هریک از دو ضلع مثلث (غیر از قاعده) را پیدا کنید (شکل ۹).
با توجه به شکل داریم:

$$|AC| = ۲۴,\ |AB| + |BC| = ۳۰,\ \widehat{BAC} = ۶۰^\circ$$

باید طول هریک از دو ضلع AB و BC را پیدا کنیم.

حل. پاره‌خط راست BD را بر قاعدهٔ AC عمود می‌کنیم. مثلث ABD قائم‌الزاویه و زاویهٔ حادهٔ دوم آن برابر ۳۰ درجه است. بنابراین

$$|AD| = \frac{۱}{۲}|AB|$$

$|AB| = x$ و $|BC| = ۳۰ - x$ می‌گیریم. بنابه دستور محاسبهٔ ضلع روبه‌رو به زاویهٔ حاده، در مثلث ABC، داریم:

$$|BC|^۲ = |AC|^۲ + |AB|^۲ - ۲|AC| \cdot |AD|$$

و یا

$$(۳۰ - x)^۲ = ۲۴^۲ + x^۲ - ۲ \times ۲۴ \times \frac{x}{۲}$$

از این معادله، مقدار x به دست می‌آید: $x = ۹$.

پاسخ. ضلع AB به طول ۹ سانتی‌متر و ضلع BC به طول ۲۱ سانتی‌متر است.

پاسخ مساله‌های فصل ۴

نمونه اول. ۱) $\frac{1}{2x(x-1)}$؛ ۲) $x_1 = 4$، $x_2 = -1$؛ ۳) $x = (4k-1)\frac{\pi}{8}$؛ ۴) $\frac{m^2 \sin\alpha}{\sin^4\frac{\alpha}{2}}$ واحد مربع.

نمونهٔ دوم. ۱) $x < 0$ و $x > 3$؛ ۲) $x = (2k+1)\frac{\pi}{8}$؛

۳) $\frac{1}{3}\pi R^3\left[\frac{\cos^4\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}} - \left(1-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2\left(2+\sin\frac{\alpha}{2}\right)\right]$ واحد مکعب

نمونه سوم. ۱) ۱۲ دقیقه، ۱ ساعت؛ ۲) ۱؛ ۳) $x = (k-1)\pi$ $(k = 1, 2, 3)$؛ ۴) $\frac{\pi d^3 \sin\beta\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ واحد مکعب.

نمونهٔ چهارم. ۱) $\frac{8}{5}$؛ ۲) $(4, 5)$ و $\left(32, \frac{3}{2}\right)$؛ ۳) $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{2}$ و $x_2 = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$ $(k \in \mathbf{Z})$، ۴) ۲۴ سانتی‌متر مربع.

نمونهٔ پنجم. ۱) ۵۰ کیلومتر در ساعت و ۴۰ کیلومتر در ساعت؛ ۲) $\left(\frac{۳}{۲}, \frac{۱}{۲}\right)$ و $(-۲, ۴)$؛ ۴) $\frac{۲\pi h^{۲}\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin^{۲}\beta}\cdot\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{۲}\right)\cos\frac{\beta}{۲}$ واحد مربع

نمونه ششم. ۱) ۱؛ ۲) $x = ۲k\pi \pm \frac{\pi}{۳}$؛ ۳) ۱۶/۸؛ ۴) $x = ۷$.

نمونهٔ هفتم. ۱) ۰؛ ۲) $x = ۳$؛ ۳) $x_{۱} = k\pi + \operatorname{arctg}۲$ و $x_{۲} = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{۳}{۲}$؛ ۴) ۵۰۴π سانتی‌متر مکعب.

نمونه هشتم. ۱) $۹a$؛ ۲) $x_{۱} = ۷$؛ $x_{۲} = ۳$؛ ۳) $x = k\pi + \operatorname{arctg}(۲ \pm \sqrt{۳})$؛ ۴) $۲\pi S\sqrt{S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{۲}}$ واحد مکعب.

نمونه نهم. ۱) ۱؛ ۲) $۰ < x < ۲$؛ ۳) $x_{۱} = (۴k+۱)۴۵^{\circ}$، $y_{۱} = (۱-۶k)۳۰^{\circ}$ و $x_{۲} = (۶k+۱)۳۰^{\circ}$، $y_{۲} = (۱-۴k)۴۵^{\circ}$؛ ۴) $\sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta-\alpha)}\cdot\frac{\sqrt{۸}d^{۲}\sin\alpha\sin(۴۵^{\circ}+\beta)}{\sin^{۲}\beta}$ واحد مربع.

نمونهٔ دهم. ۱) $(۲۵, ۱۶)$ و $(۱۶, ۲۵)$؛ ۲) $\sqrt{۵۳۳}$؛ ۴) $\frac{۲}{۳}H^{۲}\sin\alpha\cot\beta\cot\gamma$ واحد مکعب.

نمونه یازدهم. ۱) $\frac{\pi a^{۳}\sqrt{\cos\alpha}}{۱۲\sin\frac{\alpha}{۲}}$ واحد مکعب؛ ۲) $x_{۱} = -۱$ و $x_{۲} = -\frac{۳}{۲}$؛ ۳) $x_{۱} = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲}$، $x_{۲} = k\pi + (-۱)^{k}\frac{\pi}{۶}$.

نمونه دوازدهم. ۱) ۲ کیلومتر و ۲/۵ کیلومتر؛ $x = \frac{a}{۲}$؛ ۳) $\frac{۲\sqrt{۲}\sin\left(\frac{\pi}{۴}-\alpha\right)}{\sin ۲\alpha}$

۴) $\dfrac{۲\pi a^۳ \sin\beta \sin\dfrac{\alpha+\beta}{۲}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{۲}}{\sin\alpha}$ واحد مکعب.

نمونه سیزدهم. ۱) $۳۴۹\frac{۱}{۱۲}$؛ ۲) $x = k\pi - \frac{\pi}{۳}$ $(k \in \mathbf{Z})$؛ ۳) $x = ۱$؛ ۴) $\dfrac{\pi b^۲}{\sin^۲\alpha}$ واحد مربع.

نمونه چهاردهم. ۱) $k = -۵$؛ ۲) ۰؛ ۳) a) $x_۱ = k\pi + \frac{\pi}{۴}$، $x_۲ = k\pi + \operatorname{arctg}\frac{۵}{۳}$، b) $x = ۴$؛ ۴) $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۳ \sin\alpha\cos^۲\alpha$ واحد مکعب.

نمونه پانزدهم. ۱) ۴۸ سیب و ۶۰ سیب؛

۲) $\dfrac{۲\sqrt{۲}\cos^۲\dfrac{\alpha}{۲}\sin(۴۵^\circ + \alpha)}{\cos\alpha}$؛ ۳) $\left(\frac{۱}{۱۰}, ۲\right)$ و $(۱۰۰, -۱)$؛ ۴) $\dfrac{۲a^۲\sin\beta\cos^۲\left(۴۵^\circ - \dfrac{\alpha}{۲}\right)}{\cos\alpha}$ واحد مربع.

نمونهٔ شانزدهم. ۱) ۱۰۰۰ تُن؛ ۲) ۱؛ ۳) $x = \frac{۱}{۳}k\pi$؛ ۴) $۲ab\sin\alpha\sqrt{-ab\cos\alpha}$ واحد مکعب.

بخش دوم

مساله‌های ریاضی را چگونه حل کنیم؟

ایوان یاکوله‌ویچ دپمان

پیش‌گفتار

هر دانش‌آموزی در آرزوی آن است که از عهدهٔ حل مساله‌ها برآید. و این آرزوی درست و به حقی است. مهارت در حل مساله‌ها، نشان می‌دهد که نظریه‌ها، آگاهانه و ژرف و پردوام فرا گرفته شده است، و این همان چیزی است که از هر دانش‌آموزی انتظار دارند.

خواننده، نباید چشم به راه آن باشد که کتاب کوچک ما، روش حل همهٔ مساله‌هایی را که در حساب و آغاز هندسه و جبر، با آن‌ها روبه‌رو می‌شود، به او نشان دهد. توانایی حل مساله‌ها، مستلزم کار طولانی و مداوم و اغلب داشتن استعدادی است که قابل آموختن نیست: «استعداد، گلی است که در هر زمینی نمی‌روید، و به گونه‌ای می‌شکفد که هیچ کس چگونگی آن را نمی‌داند». این جمله را *فابر* (Jean Henri Fabre)، که نویسندهٔ کتاب‌های مربوط به حشرات است، گفته است؛ این دانشمند برای ریاضیات ارزش زیادی قایل بود و از آن در بیان زندگی حشرات، استفاده می‌کرد. کم نیستند پرسش‌هایی که در برخورد اول، به نظر ساده می‌آیند، ولی برای حل آن‌ها، به زیرکی و استعداد زیادی نیاز است. در این‌باره ، بهترین نمونه‌ها را

می‌توان در حساب عددهای درست پیدا کرد که در سال‌های آخر دبستان و سال‌های نخست راهنمایی، آموخته می‌شود.

در حساب عددهای درست، حکم‌های به ظاهر روشنی وجود دارد که تا امروز نتوانسته‌اند اثبات آن‌ها را پیدا کنند، اگرچه بزرگترین دانشمندان ریاضی در جریان سده‌های متوالی، در جست‌وجوی این اثبات بوده‌اند. *پافنوگی لوویچ* چبیشف (۱۸۹۴_۱۸۲۱) و *ایوان ماتویویچ وینوگرادف* (متولد ۱۸۹۱)، ریاضی‌دان‌های بزرگ روس، شهرت جهانی خود را به خاطر حل پرسش‌هایی از حساب عددهای درست، به دست آوردند.


چبیشف


وینوگرادوف

پوشکین دربارهٔ *یِوگه‌نین آنه‌گین*، که برای مطالعهٔ کتاب می‌نشست، می‌گوید:

او هدفی قابل تحسین داشت،
زیرا، می‌خواست صاحب عقل دیگران باشد.

خوانندهٔ کتاب ما، نباید به این بس کند که راه حل‌های داده شده را بخواند، بلکه باید پیش‌ازآن کوشش کند که هرمساله راخودش حل‌کند و درصورتی که موفق نشد، توضیح کتاب را ببیند تا بتواند برای حل مساله‌های دیگر از آن استفاده کند. وقتی راه حل مساله را در کتاب دیدید، تلاش کنید خودتان هم روشی برای حل پیدا کنید. چه بسا که شما بتوانید روشی قابل فهم‌تر به دست آورید و یا حتا، روشی که تا امروز در دانش، بی‌سابقه بوده است. یک ضرب‌المثل قدیمی می‌گوید: *نمی‌توان راه حل همهٔ مساله‌ها را به کسی یاد داد، ولی می‌توان این راه‌حل‌ها را یاد گرفت.* برای این منظور، باید از دشواری‌ها نهراسید و برای از بین بردن آن‌ها، پشتکار و حوصله به خرج دهید.

ن. ن. زلاتوراتسکی دربارهٔ این‌که چطور توانست ریاضیات را بفهمد، ریاضیاتی که در ابتدا برایش دور از دسترس بود، داستان آموزنده‌ای دارد. پدر زلاتوراتسکی، که مرتب از عدم پیشرفت فرزندش در ریاضیات، از جانب دبستان آگاه می‌شود، از یکی از معلمین که در مدرسهٔ دیگری کار می‌کرد، خواهش کرد که به پسرش کمک کند. دنبالهٔ داستان را از زبان خود *زلاتوراتسکی* بشنوید:

«*س* (معلمی که به او معرفی شده بود)، مرا با سردی معمولی، ولی در خانوادهٔ خود، پذیرفت و بدون این‌که علاقه‌ای نشان دهد که آیا من چیزی می‌دانم و یا چگونه می‌دانم، بدون هیچ مقدمه‌ای به آشنا کردن من با مقدماتی‌ترین بنیان‌های ریاضی پرداخت، چیزهایی که من هرگز در دبستان نیاموخته بودم و در چهار سالی که درس می‌خواندم، به آن‌ها توجهی نکرده بودم. او از ساده‌ترین موضوع‌ها، یعنی شماره‌گذاری، شروع کرد و سپس، گام به گام جلو رفت و به طور منطقی و ساده، از عملی، عمل دیگر را نتیجه گرفت و چیزهایی را برای من روشن کرد که پیش از آن به نظرم معمایی و اسرارآمیز می‌رسید . . . درس دوم، سوم، و هر بار که از پیش او می‌رفتم، بیشتر و بیشتر دلگرم می‌شدم. دو ماه گذشت و من دیگر از گیجی درآمده بودم. آقا! آیا واقعاً من ابله و کندذهن نیستم؟ آخر، آموزگاران دانشمند دبستان، برای حرف زدن با من، با این کلمه‌ها آغاز می‌کنند . . . ظاهراً «*س*» از من راضی بود، ولی آن را ظاهر نمی‌کرد؛ حتا علاقه‌ای به این موضوع نشان نمی‌داد که چرا نمره‌های من در دبستان از یک و دو، تجاوز نمی‌کند؛ وقتی پیش او بودم، خیلی به راحتی، مساله‌های دشوار حساب و هندسه را حل می‌کردم . . . بعد از گذشت دو ماه، «*س*» خیلی کوتاه به پدرم گفت: «دیگر کافی است . . . بیش از این لازم نیست پسرتان پیش من بیاید . . . بگذارید خودش را برای امتحان آماده کند . . .». من از عهدهٔ امتحان برآمدم و در میان شگفتی آموزگارانم، نمرهٔ خوب و رضایت‌بخشی گرفتم».

زلاتوراتسکی می‌نویسد که در سال‌های بعد، چه در دبیرستان و چه در دانشکده، به چشم یک «ریاضی‌دان» به او نگاه می‌کردند.


و.د. لرمانتوف

ما هم، کوشش می‌کنیم، آگاهی‌های ریاضی را به صورت داستان، و بدون این‌که از روش مورد قبول کتاب‌های درسی ریاضی پیروی کنیم، برای شما شرح دهیم.

نویسندهٔ کتاب می‌خواهد با تشکر و احترام از معلم خود، ولادیمیر ولادیمیروویچ *لرمانتوف* (۱۸۴۵_۱۹۱۸)، دستیار دانشکدهٔ پترزبورگ، و خویش نزدیک شاعر بزرگ، یاد کند. این مربی بزرگ، که کتاب‌های جالب «دورهٔ جبر عملی» و «هندسهٔ عملی بر اساس تجربه» را نوشته است، همیشه به یاد من می‌آورد که باید فکر کرد: «اول فکر کنید و بعد انجام دهید».

توصیهٔ من به خواننده این است که فکر کند. در این کتاب مساله‌هایی انتخاب شده است که برای حل آن‌ها، تنها کمی فکر کردن لازم است.

از این‌که همهٔ آنچه را که می‌خوانید، در همان لحظه‌های اول برایتان روشن و قابل فهم نیست، دچار نگرانی نشوید و خجالت نکشید. نیروی ذهنی آدمیان، یک جور نیست. بعضی‌ها، مطالب تازه را زود و راحت، ولی غالباً سطحی، یاد می‌گیرند، در حالی که بعضی دیگر، هر چیز تازه‌ای را به کندی، ولی عمیق فرا می‌گیرند.

دربارهٔ *داوید هیلبرت* (۱۸۶۲_۱۹۴۳)، بزرگترین ریاضی‌دان سدهٔ بیستم می‌گویند که او اندیشه‌های تازه را به‌کندی درک می‌کرد، ولی در عوض، وقتی که آن‌ها را یاد می‌گرفت، دیگر هیچ کس یارای برابری او را در کاربرد آن اندیشه و پیشبرد بعدی آن، نداشت.

مطالعهٔ یک کتاب ریاضی، و از آن‌جمله کتاب ما، یک سرگرمی ساده نیست. برای خواندن این‌گونه کتاب‌ها، باید قلم در دست گرفت و نتیجه‌های

به‌دست آمده را دوباره پیدا کند.


هیلبرت

استدلال‌های طولانی‌تر را نمی‌توان، با یک‌بار خواندن، فرا گرفت. ویژگی ریاضیات در این است که هر موضوع تازهٔ آن، متکی به یک موضوع تازه است، بلافاصله و بدون ابهام، روشن نمی‌شود، بلکه با ادامهٔ کار و درک موضوع‌هــای بعدی، این ابهام‌ها به تدریج برطرف می‌شود. به همین مناسبت، باید اغلب به موضوع‌های قبلی برگشت و دوباره آن‌ها را تکرار کرد. اگر برای شما، چنین وضعی پیش آمد، مثل *زلاتوراتسکی* با عجله دربارهٔ خود داوری نکنید و خود را کندذهن نپندارید، با سرسختی ادامه دهید و «سنگ خارای دانش را خرد کنید». به خاطر داشته باشید که به قول دالامبر، ریاضی‌دان و روشن‌فکر سدهٔ هیجدهم: «همه چیز را به همه کس نداده‌اند، ولی هر کس می‌تواند خود را به پافشاری و کار، عادت دهد».

درس نخست

آن‌چه در سپتامبر ۱۹۵۶، ضمن حل یک مساله، در یک مدرسهٔ لنینگراد، پیش آمد.

عدد شش‌رقمی $N = \overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$ را طوری پیدا کنید که با ضرب آن در عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، باز هم عددی شش‌رقمی با همین رقم‌ها، ولی با ردیف دیگری، به دست آید.

یادداشت. نشانهٔ $\overline{a_6a_5a_4a_3a_2a_1}$، به معنای عددی است که نخستین رقم آن از سمت راست برابر با a_1، دومین رقم آن a_2، رقم سوم آن a_3 باشد و غیره. به زبان دیگر، در این عدد، رقم یکان برابر a_1، رقم دهگان برابر a_2، رقم سدگان برابر a_3 و غیره است. نمادهای a_1، a_2، a_3، a_4، a_5، a_6 رقم‌هایی هستند که تعداد واحدها را در مرتبه‌های مختلف، نشان می‌دهند: مرتبهٔ یکان، دهگان، سدگان و غیره. یونانی‌های باستان برای بیان چنین عددی، برای واحدهای مرتبه‌های مختلف، اصطلاح‌های ویژه‌ای داشتند. آن‌ها، این مساله را تقریباً به این ترتیب بیان می‌کردند: رقم‌های عدد مورد نظر از راست به چپ عبارت است از a_1، a_2، a_3، a_4، a_5 و a_6.

و این نمونه‌ای است که چگونه، تفاوت بیان و روش نوشتن، ممکن است کار حل و بیان یک مساله را ساده کند.

حالا، پیش از آن‌که دنبالهٔ بحث ما را بگیرید، کوشش کنید خودتان جواب مساله را پیدا کنید.

آن‌چه در زیر می‌خوانید، بحثی است که بین نویسندهٔ این کتاب با شاگردانش در کلاس هشتم، انجام گرفته است.

معلم. شما در جریان سال تحصیلی، چند مساله حل می‌کنید؟

دانش‌آموز. (بعدازکمی‌سکوت). حساب‌نکرده‌ایم ... خیلی زیاد.

معلم. خیلی؟ هزارتا می‌شود؟

دانش‌آموز. ممکن است بشود!

معلم. فکر می‌کنید چرا این همه مساله را باید حل کنید؟

دانش‌آموز. (بعدازکمی‌فکر). برای این‌که نظریه های ریاضی را بهتر بفهمیم.

معلم. نظریه‌ها را برای چه یاد می‌گیرید؟

دانش‌آموز. برای این‌که بتوانیم مساله‌ها را حل کنیم.

معلم. به این ترتیب، نظریه برای حل مساله، و حل مساله برای بهتر فهمیدن نظریه، لازم است.

(خندهٔ دانش‌آموز)

آیا، این شبیه داستانی نیست که در اقیانوسی، جزیره‌ای بوده است که مردم آن کاری جز این نداشتند که لباس‌های یکدیگر را بشویند؟

(خنده)

دانش‌آموز. ریاضیات، در زندگی و عمل به کار می‌آید، ما باید بتوانیم مساله‌هایی را که در تولید و زندگی اقتصادی وجود دارد و یا در فیزیک و شیمی مطرح می‌شود، حل کنیم.

معلم. حالا، درست شد. این، بیان درست و خوبی است. ولی، شما چگونه کاربرد ریاضیات را در عمل نشان می‌دهید؟ شما در مدرسه، مساله‌های زیادی از هر نوع، حل می‌کنید، آن‌ها را در دفتر خود می‌نویسید و شماره‌گذاری می‌کنید. حالا، وقتی که در عمل به مشکلی برخورد کنید،چه می‌کنید؟ آیا به حافظهٔ خود مراجعه می‌کنید و به یاد می‌آورید که این مساله را زیر چه شماره‌ای در دفتر خود حل کرده‌اید و دفتر خود را باز می‌کنید و راه‌حل را پیدا می‌کنید؟ آیا معنای کاربرد حل مساله‌ها در عمل، همین است؟

دانش‌آموز. نه، به این ترتیب نمی‌توان عمل کرد. همهٔ مساله‌ها، از قبل حل نشده است، تعداد آن‌ها، آن‌قدر زیاد است که نه می‌توان همهٔ آن‌ها را به یاد آورد و نه می‌توان آن‌ها را پیدا کرد.

معلم. کاملاً درست است. در عمل به چنان مساله‌های گوناگونی برخورد می‌کنیم که پیش‌بینی آن‌ها در مدرسه، و از قبل، ناممکن است.

اگر شما در مدرسه، مساله حل می‌کنید، به این دلیل است که به طور کلی مساله حل کردن را یاد بگیرید.

حالا، می‌توانید بگویید که برای مساله حل کردن، به چه چیزهایی نیاز داریم؟

دانش‌آموز. باید نظریه‌ها را بدانیم و با روش‌های گوناگون حل مساله‌ها هم آشنا باشیم.

معلم. درست است. ولی، آیا می‌توان همهٔ انواع مساله‌ها را پیش‌بینی کرد و روش حل آن‌ها را به یاد داشت؟

دانش‌آموز. روش‌های مهم را می‌توان . . . مثلاً حل معادله‌ها را.

معلم. درست است. می‌توان معادله‌ها را، بنابر قاعده‌هایی که وجود دارد،

حل کرد. ولی، آیا برای تشکیل معادله‌هایی که لازم است، قاعده‌های حاضر و آماده‌ای وجود دارد؟

دانش‌آموز. نه! نمی‌توان پیش‌بینی کرد که هر بار، چگونه باید معادله را تشکیل داد.

معلم. پس برای حل یک مساله، برای تشکیل هر معادله، چه چیزی لازم است؟

دانش‌آموز. (بعد از کمی تامل). باید فکر کرد.

معلم. این، همان چیزی است که به عنوان حقیقت اصلی، به دست آوردیم. برای حل هر مساله، باید فکر کرد. اگر شما در مدرسه، مساله حل می‌کنید ـ و مساله‌های زیاد ـ تنها به این دلیل است که راه فکر کردن را یاد بگیرید. حالا، ما با هم به حل مساله‌ای می‌پردازیم که برایمان تازگی دارد و غیر از آن‌هایی است که تا امروز حل کرده‌ایم.

مساله چنین است:

یک عدد شش‌رقمی پیدا کنید که اگر آن را در هرکدام از عددهای ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ ضرب کنیم، باز هم یک عدد شش‌رقمی به دست آید که از همان رقم‌ها، ولی با ردیف دیگری، تشکیل شده باشد.

اگر، این عدد را به این شکل نشان دهیم:

$$N = \overline{a_۶a_۵a_۴a_۳a_۲a_۱}$$

که در آن $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، $a_۴$، $a_۵$ و $a_۶$، رقم‌های عدد را از راست به چپ، نشان می‌دهند، مساله عبارت می‌شود از تشکیل جدول

$$N = a_۶a_۵a_۴a_۳a_۲a_۱$$

$$۲N = \ldots\ldots\ldots$$

$$۳N = \ldots\ldots\ldots$$

$$۴N = \ldots\ldots\ldots$$

$$۵N = \ldots\ldots\ldots$$

$$۶N = \ldots\ldots\ldots$$

باید رقم‌های عدد N را پیدا کرد و علاوه بر آن، باید معلوم کرد که این رقم‌ها در جدول ما، در جای نقطه‌ها به چه ردیفی قرار گرفته‌اند.

حل این مساله را چگونه آغاز کنیم؟

سکوت

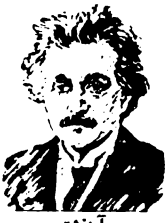
با چه روشی باید آن را حل کرد؟

(سکوت و بعد زمزمه بین دانش‌آموزان)

دانش‌آموز. آن را به کمک معادله، حل خواهیم کرد.

معلم. معادله، وسیلهٔ پرتوانی برای حل مساله‌ها است. شما آگاهید که چطور می‌توان حل مساله‌های حساب را به‌وسیلهٔ معادله، ساده کرد.

آلبرت اینشتین (۱۸۷۹ـ۱۹۵۵)، یکی از بزرگترین دانشمندان سدهٔ بیستم، در این باره، این‌طور می‌گوید: وقتی که در کلاس اول دبیرستان بودم، گفت‌وگوی دانش‌آموزان بزرگتر را شنیدم که می‌گفتند، چیزی به نام جبر می‌خوانند. وقتی که به خانه آمدم از عمویم پرسیدم که جبر چیست. عمویم گفت: «آلبرت جبر، عبارت است از حساب برای تنبل‌ها، آدم تنبل به کمک جبر فکر می‌کند و مساله‌های حساب را حل می‌کند».



آینشتین

آبرام فدورویچ ایوفه (متولد ۱۸۸۰)، دربارهٔ سال‌های اول دبیرستان خودش، می‌نویسد:

«من متوجه این واقعیت شدم که چگونه، مساله‌هایی که تا این حد پراکنده و گوناگون‌اند، به یاری یک روش، حل می‌شوند و به کمک قاعده‌ای که زیرکانه درست شده است، مساله‌های دشوار فکری، ساده و قابل حل می‌شوند . . . من این روش را خیلی شرافتمندانه نمی‌دانستم، زیرا به یاری آن می‌شود، بدون این‌که زحمت فکر کردن را به خود بدهیم، جواب درست را به دست آوریم . . . ولی، وقتی که توانستم از عهدهٔ حل مسالهٔ پیچیده‌ای برآیم، چقدر رنج‌آور بود که از معلم خود بشنوم که برای هر کدام از این نوع مساله‌ها (مربوط به حوض آب، مربوط به مسافرینی که به سوی هم در حرکتند و یا مساله‌های مربوط به تقسیم ارث)، روش مکانیکی حاضر و آماده‌ای وجود دارد که به یاری آن می‌توان، بدون فکر کردن، پاسخ درست را پیدا کرد».

ما نباید نسبت به قاعدهٔ حل مساله‌های نمونه‌ای و یا به جبر، که روش ساده‌ای برای حل مساله‌های دشوار حساب در اختیار ما گذاشته است، بی‌اعتنا باشیم. اهمیت جبر، تنها در همین‌جا نیست. جبر راه حل مجموعه‌ای از مساله‌ها را به ما می‌دهد که یا به کلی به یاری حساب حل نمی‌شوند و یا با دشواری و به صورت پیچیده‌ای به نتیجه می‌رسند. وقتی در زندگی لازم باشد که پاسخ یک پرسش ریاضی را به دست آوریم، و این پاسخ را هم می‌توانیم به یاری جبر پیدا کنیم، هیچ چیز نباید مانع استفادهٔ ما از آن بشود.

با وجود این، امکان استفادهٔ از جبر، چیزی از اهمیت روش‌های حسابی حل مساله‌ها، نمی‌کاهد. روش حسابی حل مساله‌ها، تا حد زیادی، به جای به کار گرفتن روش‌ها و قانون‌های مکانیکی و حاضر و آماده، ما را وادار به فکر کردن می‌کند.

به حل مسالهٔ خودمان برگردیم.

می‌توان، این مساله را به یاری معادله، حل کرد. ولی چگونه؟ چند معادله باید تشکیل بدهیم؟

دانش‌آموز. شش معادله، زیرا باید شش رقم را پیدا کنیم.

معلم. اگر شش رقم مجهول را پیدا کنیم، مسالهٔ ما به طور کامل حل شده است؟

دانش‌آموز. علاوه بر آن، باید معلوم کنیم که جای این رقم‌ها در شش عدد، کجاست.

معلم. برای تعیین جای رقم‌ها، به چند معادله نیاز داریم؟

دانش‌آموز. باید شش معادله را تشکیل داد و دستگاه شش معادله را حل کرد.

(خنده)

و این دشوار است.

معلم. دستگاه شش معادلهٔ شش مجهولی را می‌توان حل کرد، دشواری اصلی حل مساله در اینجا است که این معادله‌ها را با توجه به شرط‌های مساله، چگونه تشکیل دهیم.

راه دیگری برای حل مساله بیندیشیم. به یاد بیاوریم که برای حل هر مساله‌ای چه باید کرد.

دانش‌آموز. باید فکر کرد.

معلم. خوب، همین کار را بکنیم . . .

(سکوت)

انتظار نداشته باشید که یکباره هر شش رقم را پیدا کنیم. با یکی از رقم‌ها، آغاز کنیم.

دربارهٔ رقم a_6 چه می‌توان گفت؟

(سکوت)

آیا هر رقمی می‌تواند به جای نخستین رقم عدد ما باشد؟

(سکوت)

آیا به‌جای $a_۶$ می‌توان رقم ۰ را گذاشت؟

دانش‌آموز. نمی‌توان، زیرا در این صورت یک عدد شش‌رقمی نخواهیم داشت.

معلم. آیا رقم $a_۶$ می‌تواند برابر با واحد باشد؟

دانش‌آموز. می‌تواند.

معلم. رقم ۲ چطور؟

دانش‌آموز. *(بعد از کمی تامل).* $a_۶$ نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا در آن صورت $۵N$، عددی هفت رقمی می‌شود.

معلم. کاملاً درست است. به این ترتیب، اگر عدد مجهول ما وجود داشته باشد، باید داشته باشیم:

$$\boxed{a_۶ = ۱} \qquad (۱)$$

نخستین رقم عدد $۲N$ (از سمت چپ)، چیست؟ آیا این رقم می‌تواند مساوی ۱ باشد؟

دانش‌آموز. نمی‌تواند. وقتی که نخستین رقم عدد N برابر است با ۱، بعد از آنکه آن را در ۲ ضرب کنیم، نخستین رقم عدد $۲N$، حتماً باید برابر با ۲ باشد؟

دانش‌آموز. رقم نخست عدد $۲N$ می‌تواند یکی از دو عدد ۲ یا ۳ باشد، و این بستگی به آن دارد که رقم $a_۵$ برابر چه عددی باشد. اگر $a_۵$ برابر ۵ یا بیشتر باشد، در آن صورت، عدد $۲N$ با رقم ۳ آغاز می‌شود.

معلم. به این ترتیب نمی‌توانیم به طور دقیق به این پرسش که عدد دوم با ۲ آغاز می‌شود یا ۳، پاسخ بدهیم، ولی می‌توانیم نتیجهٔ مهم‌تری بگیریم. دربارهٔ هر شش عدد فکر کنیم، این عددها از سمت چپ با چه رقمی شروع می‌شوند؟

دانش‌آموز (بعد از کمی فکر). رقم‌های نخست مرتباً بزرگ می‌شوند: رقم سمت چپ هر عدد بعدی، از رقم سمت چپ عدد قبلی بزرگتر است.

معلم. این نتیجه، خیلی مهم است: شش رقم نخست این شش عدد به ترتیب صعودی هستند و از ۱ شروع شده‌اند ... دیگر چه نتیجهٔ مهمی می‌توان دربارهٔ رقم‌های عددهای مجهول ما به دست آورد؟

(سکوت)

وقتی که شش رقم ما صعودی هستند، آیا می‌توان بین آن‌ها رقم‌های مساوی پیدا کرد؟

دانش‌آموز. البته نه!

معلم. این هم نتیجه‌ای بسیار مهم است: این شش رقم با هم فرق دارند ... بین آن‌ها، رقم‌های برابر پیدا نمی‌شود.

از ده رقم موجود، کدام رقم نمی‌تواند بین این شش رقم باشد؟

دانش‌آموز (بعد از تامل). بین این شش رقم، صفر وجود ندارد.

معلم. حالا دیگر خیلی چیزها دربارهٔ رقم‌های عدد مجهول می‌دانیم! در این عدد و در حاصل‌ضرب‌های آن در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ یعنی در عددهای جدول ما، در نخستین جای سمت چپ، شش رقم متفاوت قرار دارد که به ترتیب صعودی، با شروع از ۱، قرار گرفته‌اند. رقم صفر در بین آن‌ها وجود ندارد. اما، عدد مجهول ما، چند رقم دارد؟

دانش‌آمو. شش رقم.

معلم. آیا برای نخستین رقم‌ها از سمت چپ، و رقم‌های عدد مجهول ما (یعنی a_1، a_2، a_3، a_5 و a_6)، مطلب کلی دیگری وجود دارد؟

دانش‌آموز. رقم‌های عدد مجهول، همان نخستین رقم‌های سمت چپ عددهای جدول هستند، تنها در عدد N، این رقم‌ها به ردیف دیگری هستند.

معلم. دوباره، نتیجه‌های کلی را که دربارهٔ رقم‌های عدد مورد نظر به دست آورده‌ایم، به یاد بیاوریم:

(۲) رقم‌های a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 ، a_5 و a_6 ، متفاوتند.

(۳) بین رقم‌های a_1 ، a_2 ، a_3 ، a_4 ، a_5 و a_6 صفر وجود ندارد

(۴) رقم‌های اول عددهای جدول، صعودی هستند.

این‌ها، آگاهی‌های کلی، دربارهٔ عدد مطلوب است.

به رقم a_1 بپردازیم،

آیا هر رقمی می‌تواند در جای اول سمت راست عدد، قرار گیرد؟

دانش‌آموز دیگر. نمی‌تواند، زیرا اصولاً در بین رقم‌های عدد ما، صفر وجود ندارد.

دانش‌آموز دیگر. واحد هم نمی‌تواند، زیرا، رقم ۱ در مرتبهٔ ششم عدد قرار دارد و می‌دانیم که رقم‌های عدد ما، متفاوتند.

معلم. آیا، مثلاً $a_1 = 5$ می‌تواند باشد؟

دانش‌آموز. نه، نمی‌تواند، اگر a_1 برابر ۵ باشد، آخرین رقم عدد $2N$ برابر صفر می‌شود، در حالی که بین رقم‌های مورد نظر ما، صفر وجود ندارد.

معلم. با توجه به همین علت، دیگر کدام رقم نمی‌تواند در سمت راست عدد مجهول قرار گیرد؟

دانش‌آموز. a_1 نمی‌تواند عددی زوج باشد، زیرا، اگر a_1 زوج باشد، عدد $5N$ به صفر ختم خواهد شد.

معلم. به این ترتیب، a_1 برابر با هیچ کدام از رقم‌های ۰، ۱، ۲، ۴، ۵، ۶ و ۸ نیست. تنها رقم‌های ۳، ۷ و ۹ می‌ماند، که می‌توانند یکان عدد N باشند.

آیا $a_1 = 3$ می‌تواند باشد؟

(همه فکر می‌کنند، بی آنکه کسی به نتیجه‌ای برسد)

این دشوارترین مرحلهٔ حل مساله است:

فرض کنیم $a_۱ = ۳$ در این صورت، رقم یکان در عددهای N، $۲N$، $۳N$، $۴N$، $۵N$ و $۶N$ چیست؟

دانش‌آموز. ۳، ۶، ۹، ۲، ۵ و ۸

معلم. آیا این وضع ممکن است؟

(فکر می‌کنند، ولی به پاسخ مشخصی نمی‌رسند)

در اینجا چند رقم داریم؟ درضمن، عدد N چند رقم دارد؟

دانش‌آموز. در اینجا شش رقم داریم، عدد N هم شش‌رقمی است.

معلم. آیا این شش رقم، می‌توانند رقم‌های عدد N باشند؟

(فکر و مشورت با هم)

دانش‌آموز. نمی‌توانند. می‌دانیم که $a_۶ = ۱$ و در اینجا، هیچ کدام از رقم‌ها برابر با ۱ نیست؛ $a_۱$ نمی‌تواند برابر با ۳ باشد.

معلم. حالا دیگر، شما می‌توانید بگویید که رقم $a_۱$ برابر با ۷ است یا ۹.

دانش‌آموز. اگر داشته باشیم: $a_۱ = ۷$، رقم‌های یکان در عددهای جدول به ترتیب برابر با ۷، ۴، ۱، ۸، ۵ و ۲ می‌شود.

اگر داشته باشیم: $a_۱ = ۹$، این رقم‌ها، چنین‌اند: ۹، ۸، ۷، ۶، ۵، ۴.

از اینجا دیده می‌شود که رقم یکان عدد N نمی‌تواند برابر ۹ باشد (درست به همان دلیلی که نمی‌توانست برابر ۳ باشد). بنابراین، اگر عدد N وجود داشته باشد، باید $a_۱$ برابر با ۷ باشد.

معلم. بنویسیم: اگر عدد N وجود داشته باشد، در آن صورت داریم:

$$\boxed{a_۱ = ۷} \qquad (۵)$$

حالا، عددهای جدول، یعنی N، $۲N$، $۳N$، $۴N$، $۵N$، $۶N$ را چگونه می‌توانیم بنویسیم؟

دانش‌آموز. به این ترتیب:

$$\begin{aligned} N &= ۱a_۵a_۴a_۳a_۲۷ \\ ۲N &= ۲\ldots۴ \\ ۳N &= ۴\ldots۱ \\ ۴N &= ۵\ldots۸ \\ ۵N &= ۷\ldots۵ \\ ۶N &= ۸\ldots۲ \end{aligned} \qquad \text{(II)}$$

ستون اول سمت راست را از این‌جا به دست آورده‌ایم که می‌دانیم $a_۱ = ۷$، با ضرب ۷ در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ به ترتیب رقم‌های یکان عددهای بعدی به دست آمده است. ستون سمت چپ هم با توجه به نتیجهٔ (۴) تنظیم شده است.

معلم. رقم $a_۵$ را چگونه پیدا کنیم؟

دانش‌آموز. (به کمک معلم) $a_۵$ نمی‌تواندمساوی ۱ باشد، زیراعدد ۱ نمی‌تواند دو بار در عدد مجهول تکرار شود. $a_۵$ نمی‌تواند برابر ۲ باشد، زیرا در این صورت، رقم سمت چپ عدد $۳N$ برابر ۴ نمی‌شود (اگر $a_۴$ را بزرگترین رقم ممکن، یعنی ۸، بگیریم، حاصل ضرب ۳×۱۲۸، برابر ۳۸۴ و نخستین رقم سمت چپ عدد $۳N$ برابر ۳ می‌شود نه ۴). $a_۵$ برابر ۳ نیست، زیرا اصولاً رقم ۳ بین رقم‌های عدد مجهول نیست. $a_۵$ می‌تواند برابر ۴ باشد، زیرا از ضرب ۱۴ (دو رقم سمت چپ عدد N) در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، نخستین رقم سمت چپ به ترتیب برابر ۲، ۴، ۵، ۷، ۸، به دست می‌آید. $a_۵$ نمی‌تواند برابر ۵ یا بیشتر از ۵ باشد، زیرا در این صورت، عدد $۲N$ با رقم ۳ شروع خواهد شد. به این ترتیب:

$$\boxed{a_۵ = ۴} \qquad (۶)$$

معلم. درست است. با همین روش می‌توان رقم‌های $a_۴$ و $a_۳$ را هم پیدا کرد، ولی راه کوتاه‌تری هم وجود دارد.

می‌بینیم که چه در ستون اول و چه در ستون‌های دیگر جدول، همهٔ شش رقم مورد نظر ما، وجود دارد، تنها ردیف این رقم‌ها در ستون‌های مختلف متفاوت است. در واقع، ممکن نیست که در یک ستون دو رقم مساوی وجود داشته باشد، زیرا، اگر مثلاً فرض کنیم که داشته باشیم:

$$۶N = ۸abcd۲$$

$$۴N = ۵ebfg۸$$

یعنی، فرض کنیم که در سومین ستون از سمت چپ، در هر دو عدد، رقم b وجود داشته باشد. اگر، این دو عدد را از هم کم کنیم، در سمت چپ $۶N - ۴N$ یعنی $۲N$ به دست آید. در سمت راست تساوی تفاضل، برای رقم سوم از سمت چپ، یا صفر به دست می‌آید (وقتی که داشته باشیم $c > f$) و یا ۹ (وقتی که داشته باشیم $c < f$). ولی چون تفاضل برابر است با $۲N$، که تنها می‌تواند از همان شش رقم عدد N تشکیل شده باشد و بین رقم‌های عدد مجهول هم نه صفر وجود دارد و نه ۹، بنابراین در یک ستون جدول نمی‌تواند دو رقم مساوی پیدا شود. به این ترتیب، در همهٔ ستون‌های جدول (II) همان رقم‌های ستون اول یا ستون آخر، وجود دارد. مجموع رقم‌های ستون آخر برابر است با ۲۷، یعنی مجموع رقم‌های هر ستون دلخواه برابر با ۲۷ می‌شود. در نتیجه، مجموع عددهای تساوی‌های (II) چنین می‌شود:

$$۲۱N = ۲۹۹۹۹۹۷$$

و از آنجا

$$N = \frac{۲۹۹۹۹۹۷}{۲۱} = ۱۴۲۸۵۷$$

اگر این عدد را در ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶، ضرب کنیم، معلوم می‌شود که این عدد با همهٔ شرط‌های مساله می‌سازد، زیرا همهٔ عددهای جدول، از رقم‌های شبیه به هم تشکیل شده‌اند، که تنها در ردیف این رقم‌ها با هم تفاوت دارند:

$$N = ۱۴۲۸۵۷$$

$$۲N = ۲۸۵۷۱۴$$

$$۳N = ۴۲۸۵۷۱$$

$$۴N = ۵۷۱۴۲۸$$

$$۵N = ۷۱۴۲۸۵$$

$$۶N = ۸۵۷۱۴۲$$

به این ترتیب، عدد مجهول را به دست آوردیم:

$$\boxed{۱۴۲۸۵۷} \qquad (۷)$$

بعد، شش دانش‌آموز به پای تخته، فراخوانده شدند، به هرکدام از آن‌ها، یکی از کسرهای $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۴}{۷}$، $\frac{۵}{۷}$، $\frac{۶}{۷}$ داده شد تا به کسر دهدهی تبدیل کنند. آن‌ها، در میان شگفتی دانش‌آموزان کلاس، به دست آوردند:

$$\frac{۱}{۷} = ۰/(۱۴۲۸۵۷)$$

$$\frac{۲}{۷} = ۰/(۲۸۵۷۱۴)$$

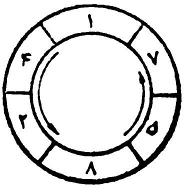
$$\frac{۳}{۷} = ۰/(۴۲۸۵۷۱)$$

$$\frac{۴}{۷} = ۰/(۵۷۱۴۲۸)$$

$$\frac{۵}{۷} = ۰/(۷۱۴۲۸۵)$$

$$\frac{۶}{۷} = ۰/(۸۵۷۱۴۲)$$

معلوم شد که شش عدد ما، عبارتند از دوره‌های گردش، در تبدیل کسرهای $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۴}{۷}$، $\frac{۵}{۷}$، $\frac{۶}{۷}$، به کسرهای دهدهی. دورهٔ کسر $\frac{۱}{۷}$ برابر است با عدد ۱۴۲۸۵۷؛ و همهٔ دوره‌های گردش دیگر از همین عدد، با انتقال یک یا چند رقم از سمت چپ به سمت راست، به دست می‌آید. اگر رقم‌های عدد ۱۴۲۸۵۷ را روی محیط دایره‌ای بنویسیم، هر ۶ دورهٔ گردش را می‌توان ضمن حرکت دور این دایره و با شروع از رقم‌های ۱، ۲، ۴، ۵، ۷ یا ۸، به دست آورد. این روش تشکیل عددها را *تبدیل دوری* گویند.



بدون این‌که وارد در بحث مفصل بشویم، یادآور می‌شویم، که خاصیت مربوط به دوره‌های گردش کسرهای $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۲}{۷}$، ...، برای همهٔ کسرهایی که دورهٔ گردش دارند. صدق نمی‌کند. مثلاً

$$\frac{۱}{۱۱} = ۰/(۰۹)$$

$$\frac{۲}{۱۱} = ۰/(۱۸)$$

$$\frac{۳}{۱۱} = ۰/(۲۷)$$

. . . .

حل مساله، با این بحث، تمام شد:

معلم. آن‌هایی که هزار مساله حل کرده بودند، حالا از حل ۱۰۰۱ مساله آگاهی دارند، یک مساله بیشتر.

دانش‌آموز. ولی، یک مسالهٔ غیر عادی بود.

معلم. چرا غیر عادی؟

دانش‌آموز. برای این‌که خیلی زیبا حل شد.

معلم. زیبا؟ می‌توانید زیبایی را تعریف کنید؟

دانش‌آموز. خوب، این روشن است! مثلاً آدم دلش می‌خواهد آواز زیبا را بشنود، در حالی که از صدای نازیبا فرار می‌کند.

معلم. درست! زیبایی برای هر کاری، اهمیت زیاد دارد.

در ریاضیات هم، زیبایی وجود دارد. اغلب، یک مساله را می‌توان با روش‌های گوناگونی حل کرد. در ریاضیات، آن روشی زیباتر است که ساده‌تر باشد. وقتی که یک مسالهٔ دشوار با روش ساده و از راه کوتاهی به نتیجه برسد، زیبا خواهد بود. و وقتی که برای یک مساله، راهی طولانی انتخاب شود و با روش‌های پیچیده‌ای به نتیجه برسد، نازیباست. پ. ل. چبیشف، ریاضیدان بزرگ، راهی را در ریاضیات گشود که از جنبه‌های مشخص آن، پیدا کردن ساده‌ترین روش‌ها، برای حل مساله است.

آیا برای شما پیش نیامده است که معلم شما، به جای نمرهٔ ۵، نمره ۴ را به شما داده باشد، اگر چه مساله را درست حل کرده بودید؟

دانش‌آموز. چرا، پیش آمده است.

معلم. این، موقعی بوده است که شما مساله را درست، ولی نازیبا حل کرده بوده‌اید.

هر وقت که مساله‌ای را حل می‌کنید، این دو پرسش را در برابر خود قرار دهید:

۱) آیا مساله را درست حل کرده‌ام؟

۲) آیا راه خوبی برای حل آن انتخاب کرده‌ام؟

و تنها وقتی که به هر دو پرسش، پاسخ مثبت دادید، باید چشم به راه نمرهٔ عالی باشید.

درس تمام شد.

درس دوم

برای حل مساله، باید دربارهٔ هر

واژه‌ای از صورت مساله، دقت کرد.

برای حل هر مساله باید مراقب هر کلمه از شرط‌های مساله باشیم.

گاهی ممکن است، حل مساله، به کلمه‌ها و شرط‌هایی بستگی داشته باشد، که در نظر اول، بی‌اهمیت تلقی شود.

دو مسالهٔ زیر، نمونه‌هایی از این‌گونه مساله‌ها هستند، که حل آن‌ها، بستگی به دقت در هر کلمه از صورت آن‌ها دارد.

مسالهٔ ۱. پدری سه پسر داشت که همهٔ آن‌ها، خوب درس می‌خواندند. پدر می‌خواست بداند، کدام یک از آن‌ها تیزهوش‌تر است. برای این منظور، دست به آزمایش زیر زد:

پنج کلاه انتخاب کرد. جلو چشم بچه‌ها، روی سه کلاه را ستارهٔ قرمز و روی دو کلاه دیگر را ستارهٔ سفید چسبانید. بعد چشم‌های سه پسر را بست

و به سر هر کدام از آن‌ها کلاهی گذاشت و دو کلاه باقی‌مانده را پنهان کرد. بعد، نوار را از چشم‌های بچه‌ها برداشت و پرسید: چه کسی می‌تواند بگوید که ستارهٔ کلاهش چه رنگ است؟

بعد از کمی فکر، یکی از بچه‌ها گفت که ستارهٔ کلاهش چه رنگ است و برای پاسخ خود هم، دلیل آورد.

پرسش از خواننده:

ستارهٔ کلاه این بچه چه رنگی داشته است، او چگونه این مطلب را فهمیده است و چه ستاره‌هایی روی کلاه دو نفر دیگر بوده است؟

یادداشت. پیش از آن‌که خودتان به حل مساله نپرداخته‌اید، به شرح حل آن مراجعه نکنید.

حل. برای حل مساله، باید در نظر داشت که پسر *تنها بعد از آن‌که کمی* فکر کرد، توانست پاسخ را پیدا کند.

ستاره‌هایی که بر روی سه کلاه قرار دارد، تنها به یکی از سه صورت زیر می‌تواند باشد:

۱) سفید، سفید، قرمز

۲) سفید، قرمز، قرمز

۳) قرمز، قرمز، قرمز.

اگر حالت اول را در نظر بگیریم، پسر سوم، که می‌دانست بیش از دو ستارهٔ سفید وجود ندارد، بلافاصله می‌گفت که ستارهٔ کلاه او قرمز است. *در این حالت*، هیچ فکر کردنی *لازم نیست*.

اگر هم حالت دوم را در نظر بگیریم، وقتی که پسر دوم (و همراه او پسر سوم) می‌بیند که یکی از برادرهایش ستارهٔ سفید و دیگری ستارهٔ قرمز دارد، باید بلافاصله بگوید که روی کلاه او ستارهٔ قرمز وجود دارد، زیرا اگر کلاهی با ستارهٔ سفید می‌داشت، برادر سوم بلافاصله اعلام می‌کرد که ستارهٔ او قرمز

است. بنابراین، در این حالت هم، به فکر کردن نیازی نیست.

چون، بنابر شرط مساله، *پاسخ تنها بعد از آن‌که بچه کمی فکر می‌کند، داده می‌شود*، باید وضع سوم وجود داشته باشد، زیرا در این حالت باید هرکدام از پسرها انتظار بکشند، آیا دیگران دربارهٔ کلاه خودشان، اطلاعی می‌دهند یا نه.

به این ترتیب، هر سه پسر کلاه با ستارهٔ قرمز به سر داشتند و برای حل مساله، در شرایط برابر بودند؛ در نتیجه، پسری که برای نخستین بار رنگ کلاه خود را بیان کرد، در واقع تیزهوش‌ترین آن‌ها بوده است.

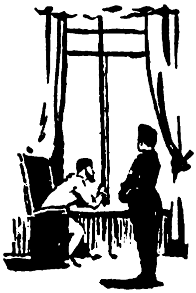
اگر در صورت مساله، جملهٔ «*بعد از کمی فکر کردن*» وجود نداشت، مساله را نمی‌شد حل کرد.

بعد از حل مسالهٔ ۱ ، خوانندهٔ دقیق، می‌تواند مسالهٔ ۲ را حل کند، که اگرچه پیچیده‌تر است و به بعضی محاسبه‌ها هم نیاز دارد،ولی از نظر ماهیت و روش حل، به مسالهٔ ۱ نزدیک است.

پیش از آن‌که، حل مساله را ببینید، کوشش کنید خودتان آن را حل کنید، مگر این‌که به این نتیجه برسید که حل آن، بیرون از نیروی شماست.

مسالهٔ ۲. *کونان دویل* (Conan Doyle - Arthur)، نویسندهٔ مشهور انگلیسی، در یکی از داستان‌های خود به نام «*ماجراهای شرلوک هولمس*»، این مساله را طرح می‌کند:

دکتر هوتسن و مهمانش شرلوک هولمس، نزدیک پنجرهٔ باز می‌نشینند. از باغ، فریادهای خندهٔ گروه بزرگی از بچه‌ها به گوش می‌رسید.



مهمان. خواهش می‌کنم به من بگویید که شما چند بچه دارید؟

صاحب‌خانه. همهٔ آن‌ها بچه‌های من نیستند؛ این‌ها بچه‌های چهار خانواده‌اند. تعداد بچه‌های من، از همه بیشتر است. برادرم، بچه‌های کمتری دارد و خواهرم باز هم کمتر، و تعداد بچه‌های عمو از همه کمترند. آن‌ها، به این مناسبت شلوغ می‌کنند که تعدادشان برای دو گروه نه نفری، کافی نیست. و یک تصادف جالب: اگر تعداد بچه‌های چهار خانواده را در هم ضرب کنید، شمارهٔ منزل من را به دست می‌آورید، که شما آن را می‌دانید.

مهمان. من در مدرسه، ریاضیات خوانده‌ام! کوشش می‌کنم تعداد بچه‌های هر خانواده را حساب کنم.

مهمان، بعد از بعضی محاسبه‌ها، گفت:

برای حل مساله، باید آگاهی دیگری هم به من بدهید. آیا عمو، یک بچه دارد یا بیشتر؟

صاحب‌خانه، پاسخ او را داد، ولی ما از چگونگی آن بی‌خبریم.

مهمان. حالا من می‌توانم، تعداد بچه‌های هر خانواده را بگویم! و در واقع هم، جواب درست را پیدا کرده بود.

پرسش. شمارهٔ منزل و تعداد بچه‌های هر خانواده چقدر است؟

حل. روشن است که مهمان، مساله را به این ترتیب حل کرده است. او می‌دانست که تعداد بچه‌های چهار خانواده، روی هم از ۱۸ کمتر است. او، شمارهٔ N منزل را هم می‌دانست.

اگر تعداد بچه‌های چهار خانواده را به ترتیب با حرف‌های a، b، c و d نشان دهیم، همهٔ این عددها مثبت و درست‌اند و حاصل ضرب آن‌ها هم

برابر است با N.

$$N = abcd$$

$$a > b > c > d,\ a + b + c + d < ۱۸$$

مهمان، می‌بایست چهار عدد متفاوت درست طوری انتخاب کند که حاصل ضرب آن‌ها برابر N و مجموع آن‌ها کوچکتر از ۱۸ شود، ولی، مهمان نتوانست عددها را پیدا کند و ناچار شد بپرسد، آیا عمو، یک بچه دارد یا بیشتر. و بعد از آنکه، مهمان پاسخ خود را گرفت، توانست پاسخ مساله را پیدا کند.

ولی، ما برای حل مساله، در موقعیت دشوارتری هستیم، زیرا ما شمارهٔ منزل را نمی‌دانیم، و بنابراین نمی‌توانیم از روش مهمان، برای حل مساله استفاده کنیم.

ولی؛ ما هم می‌توانیم مساله را به سادگی حل کنیم، به شرطی که ... به شرطی که کمی فکر کنیم.

نخست به این پرسش پاسخ دهیم: عمو، چند بچه می‌تواند داشته باشد؟

به سادگی می‌توان فهمید که عمو نمی‌تواند سه بچه داشته باشد.

اگر فرض کنیم که تعداد بچه‌های عمو، $d = ۳$ باشد، در این صورت مقدار c دست‌کم ۴، b دست‌کم ۵ و a دست‌کم ۶ می‌شود. در نتیجه، تعداد همهٔ بچه‌ها روی‌هم، باید دست‌کم چنین باشد:

$$۳ + ۴ + ۵ + ۶ = ۱۸$$

ولی، می‌دانیم که تعداد بچه‌ها، کمتر از ۱۸ است. بنابراین، عمود یا یک بچه دارد و یا دوتا.

جدولی از همهٔ حالت‌های ممکن چهار عدد درست مختلف، تشکیل می‌دهیم، به نحوی که کوچکترین آن‌ها برابر ۲ و مجموع چهار عدد، کمتر از ۱۸ باشد.

روی‌هم، هفت حالت پیدا می‌شود:

حاصل‌ضرب	مجموع	عددها
۱۲۰	۱۴	۲, ۳, ۴, ۵
۱۴۴	۱۵	۲, ۳, ۴, ۶
۱۶۸	۱۶	۲, ۳, ۴, ۷
۱۹۲	۱۷	۲, ۳, ۴, ۸
۱۸۰	۱۶	۲, ۳, ۵, ۶
۲۱۰	۱۷	۲, ۳, ۵, ۷
۲۴۰	۱۷	۲, ۴, ۵, ۶

اگر تنها این شرط را در نظر بگیریم که تعداد بچه‌ها روی‌هم کمتر از ۱۸ است و فرض کنیم که تعداد بچه‌های عمو، برابر ۲ باشد، هفت جواب متفاوت برای تعداد بچه‌های چهار خانواده، به دست می‌آید.

به همین ترتیب، می‌توان با فرض این‌که، عمو تنها یک بچه داشته باشد، همهٔ حالت‌هایی از حاصل‌ضرب چهار عدد درست را پیدا کرد، به نحوی که کوچکترین آن‌ها برابر ۱ و مجموع آن‌ها کمتر از ۱۸ باشد (خودتان، این عددها را به‌دست آورید). ولی، اگر *با دقت به همهٔ شرط‌های مساله توجه کنیم*، برای حل مساله، نیازی به تشکیل جدول همهٔ حالت‌های ممکن این عددها نیست.

وقتی مهمان مساله را حل کرد، متوجه شد که برای پیدا کردن جواب مساله، آگاهی‌هایی که دارد، کافی نیست و او باید بداند، آیا عمو، یک بچه دارد یا بیشتر. چرا مهمان به این آگاهی نیاز داشت، با وجودی که می‌دانست، شمارهٔ منزل چند است؟ روشن است که شمارهٔ منزل، عددی بوده است که هم در حاصل‌ضرب چهار عددی که کوچکترین آن‌ها برابر است با ۱، و هم در حاصل‌ضربی که کوچکترین عامل آن برابر است با ۲، به دست می‌آید.

همین وضعیت به ما امکان می‌دهد که N (شمارهٔ منزل) را پیدا کنیم؛ این عدد باید هم در جدولی که ما تشکیل دادیم، و هم در جدول حاصل‌ضرب‌های

چهار عددی که با ۱ آغاز می‌شود، مشترک باشد.

چون در جدول نخست، کوچکترین عدد برابر است با ۱۲۰، برای تشکیل جدول حاصل‌ضرب‌های چهار عدد مختلف با کوچکترین عامل برابر ۱، می‌توانیم تنها حالت‌هایی را در نظر بگیریم که حاصل‌ضرب چهار عدد، دست‌کم برابر ۱۲۰ باشد؛ و این، کار محاسبه را کم می‌کند.

این حالت‌ها چنین‌اند:

حاصل‌ضرب	مجموع	عددها
۱۲۰	۱۷	۱, ۳, ۵, ۸
۱۲۶	۱۷	۱, ۳, ۶, ۷
۱۲۰	۱۶	۱, ۴, ۵, ۶
۱۴۰	۱۷	۱, ۴, ۵, ۷

می‌بینیم که تنها عدد مشترک، در هر دو گروه حاصل‌ضرب، ۱۲۰ است. روشن است که شمارهٔ منزل چنین است:

$$N = ۱۲۰$$

هرکدام از چهار خانواده، چند بچه دارند؟ حاصل‌ضرب ۱۲۰ در چهار حالت، پیدا می‌شود:

$$۲ \times ۳ \times ۴ \times ۵ = ۱۲۰$$

$$۱ \times ۳ \times ۵ \times ۸ = ۱۲۰$$

$$۱ \times ۴ \times ۵ \times ۶ = ۱۲۰$$

مطالعهٔ دقیق شرط‌های مساله، امکان می‌دهد که دنبالهٔ مساله را حل کنیم. مهمان گفته بود، اگر بداند، عمو یک بچه دارد یا بیشتر، می‌تواند جواب مساله را پیدا کند و بگوید که هر خانواده، چند بچه دارد.

اگر به مهمان گفته شده بود که عمو یک بچه دارد، او نمی‌توانست پاسخ دقیقی دربارهٔ تعداد بچه‌ها بدهد، زیرا شمارهٔ منزل $(N = ۱۲۰)$ در دو حالت به دست می‌آمد:

$$d = ۱,\ c = ۳,\ b = ۵,\ a = ۸;$$
$$d = ۱,\ c = ۴,\ b = ۵,\ a = ۶$$

چون مهمان، پاسخ مشخصی داده است، حتماً به او گفته شده است که تعداد بچه‌های عمو دوتا است. در این صورت، شمارهٔ منزل $(N = ۱۲۰)$، تنها در یک حالت به دست می‌آید:

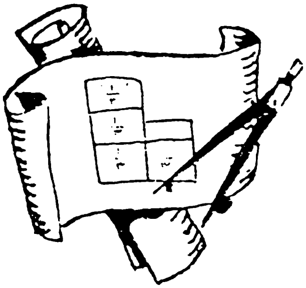
$$d = ۲,\ c = ۳,\ b = ۴,\ a = ۵$$

مساله‌ای که در نظر اول، گمان می‌رفت، به مناسبت عدم کفایت داده‌ها، قابل حل نیست، به سادگی حل شد. ولی این حل، *تنها با دقت کامل روی جمله به جملهٔ صورت مساله*، امکان‌پذیر شد. و این دقت، برای حل هر مساله‌ای لازم است.

درس سوم

چگونه گاهی رسم شکل،

به حل مساله کمک می‌کند؟



حساب، بنیان تمامی ریاضیات است. در زندگی عادی و عملی روزانه بیش از هر چیز، به حل مساله‌های حساب نیازمندیم. ولی، بسیاری از این مساله‌ها به دشواری برخورد می‌کنند و به سادگی به راه‌حل خالص حسابی، تسلیم نمی‌شوند.

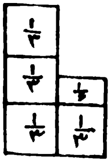
البته، جبر به یاری حساب آمده است، ولی در عمل معلوم می‌شود که تشکیل معادله‌ها، برای حل مساله، همیشه به سادگی انجام نمی‌گیرد؛ در واقع، برای تشکیل معادله، یک قانون کلی وجود ندارد و برای هر مساله، باید راه‌حل خاص آن را جست‌وجو کرد. سخن کوتاه، برای تشکیل معادله، دربارهٔ هر مساله، باید فکر کرد.

حالت‌هایی وجود دارد که تشکیل معادله و حل مساله را می‌توان با رسم شکل، ساده‌تر کرد. چند نمونه می‌آوریم.

۱. مسالهٔ ل. ن. تولستوی.

آ. و. زینگر استاد مشهور فیزیک، در خاطره‌های خود نقل می‌کند که *لِونیکلایویچ تولستوی*، به مسالهٔ زیر خیلی علاقه‌مند بود: «دروگران یک شرکت تعاونی می‌خواستند دو مزرعه را درو کنند. یکی از این دو مزرعه، دو برابر دیگری بود. همهٔ دروگران، نصف روز را در مزرعهٔ بزرگتر کار کردند، بعد گروه دروگران، به دو قسمت مساوی تقسیم شدند، نیم اول در مزرعهٔ بزرگتر باقی ماند و کار آن را تا غروب تمام کرد؛ نیم دوم دروگران در مزرعهٔ کوچکتر مشغول شد، ولی تا غروب نتوانستند آن را تمام کنند. ماندهٔ مزرعهٔ دوم را، یکی از دروگران در طول یک روز دیگر، تمام کرد. در این شرکت تعاونی چند دروگر بوده است؟»

این مساله را می‌توان، با روش خالص حساب، حل کرد. البته، مثل همهٔ راه‌حل‌های حسابی، باید فکر کرد و مسیر حل را پیدا کرد. ساده‌ترین راه‌حل این مساله، مثل همهٔ مساله‌های حساب، راه‌حل جبری و به کمک تشکیل معادله است. به یاد بیاوریم که «جبر، حساب تنبل‌هاست» و اگر نخواهیم در گروه «تنبل‌ها» قرار بگیریم، باید کوشش کنیم، آن را بدون یاری معادله، حل کنیم. این راه‌حل را به سادگی می‌توان پیدا کرد که بی‌تردید با به کار گرفتن شکل هندسی، باز هم ساده‌تر می‌شود.



دو مزرعه را به وسیلهٔ شکل مجاور نشان می‌دهیم که در آن، مستطیل سمت چپ، نمایندهٔ مزرعه اول، و مستطیل سمت راست، که نصف مستطیل اول است، نمایندهٔ مزرعهٔ دوم باشد.

برای درو کردن مزرعهٔ اول، تمام گروه دروگران، نصف روز و نیمی از دروگران، نیم دیگر روز را کار کرده‌اند. به زبان دیگر، باید نیمی از دروگران، سه تا نصف روز کار کنند تا تمام مزرعهٔ بزرگتر، درو شود (نیروی کار همهٔ دروگران، یکنواخت به حساب می‌آید). بنابراین، نیمی از دروگران در نصف روز، $\frac{۱}{۳}$ مزرعهٔ بزرگتر را درو می‌کنند.

چون، مزرعهٔ کوچکتر، نصف مزرعهٔ بزرگتر است، به اندازهٔ $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳}$ مزرعهٔ بزرگتر می‌شود (اگر مزرعهٔ بزرگتر را $\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳} = ۱$ بگیریم، برای مزرعهٔ کوچکتر $\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید) و نیمی از دروگران، در نصف دوم روز، به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ مزرعهٔ بزرگتر را در مزرعهٔ کوچکتر، درو می‌کنند و به اندازهٔ $\frac{۱}{۶}$ مزرعهٔ بزرگتر از آن باقی می‌ماند. بنابر شرط مساله، این باقی‌مانده را یک نفر و در یک روز می‌تواند درو کند.

تمام گروه دروگران، در یک روز، همهٔ مزرعهٔ اول و به اندازه $\frac{۱}{۳}$ مزرعهٔ اول از مزرعهٔ کوچکتر را درو می‌کنند، بنابراین، تمام دروگران در یک روز به اندازهٔ

$$۱ + \frac{۱}{۳} = \frac{۴}{۳} = \frac{۸}{۶}$$

مزرعه بزرگتر را می‌توانند دور کنند. از آن‌جا که یک نفر در یک روز $\frac{۱}{۶}$ مزرعهٔ بزرگتر را درو می‌کند، برای درو کردن $\frac{۸}{۶}$ مزرعهٔ بزرگتر، به ۸ دروگر در یک روز نیاز است. به این ترتیب، تعداد کل دروگران، مساوی ۸ نفر بوده است.

یادداشت. *آ. و. زینگر*، تاریخ این مساله را، این‌طور شرح می‌دهد.

پدر *الکساندر واسیلوویچ زینگر*، یعنی *واسیلی یاکولویچ زینگر* (۱۸۳۶ - ۱۹۰۷)، استاد ریاضیات در دانشگاه مسکو و دایی او، *ای. ای. رایوسکی*، که دوست نزدیک *ل. ن. تولستوی* بود، با هم در دانشگاه مسکو، درس می‌خواندند. آن‌ها، دوست دانشجوی با استعدادی به نام پتروف داشتند که خیلی جوان از دنیا رفت. پتروف، اعتقاد داشت که آموزش مدرسه‌ای، در مرز بالای خود، راه حل مساله‌های عادی را با روش‌های عادی، به دانش‌آموزان می‌آموزد. به همین مناسبت، حتا در حالت‌هایی که برای حل یک مساله، روش‌هایی ساده‌تر از روش‌های عمومی و نمونه‌ای وجود دارد، دانش‌آموزان با استعداد هم وادار می‌شوند از همان الگوهای کلی پیروی کنند. پتروف، از این‌گونه مساله‌ها زیاد درست کرده بود، که مسالهٔ مربوط به دروگرها هم یکی از آن‌ها بود. این مساله، از طریق *ای. ای. رایوسکی* و *و. یا.* زینگر به *ل. ن. تولستوی*، خویش نزدیک نویسندهٔ بزرگ روس، رسید.

تولستوی، تا آخرین روزها، به آموزش حساب در مدرسه، علاقه‌مند بود (او دربارهٔ حساب، کتاب درسی نوشته است) و به‌ویژه، به مساله‌هایی علاقه‌مند بود که به ظاهر، خیلی دشوار به نظر می‌رسید، ولی در واقع، راه‌حل ساده‌ای داشت. *آ. و.* زینگر نقل می‌کند، وقتی به *ل. ن. تولستوی* برخورد کرد که او دوران پیری خود را می‌گذراند و به‌ویژه از این جهت مفتون مسالهٔ دروگران شده بود که با رسم یک شکل ساده، حل مساله کاملاً روشن و آسان می‌شد. در ارزشی که ل. ن. تولستوی به استفادهٔ از طرح‌های هندسی برای حل مساله‌ها می‌دهد، کاملاً حق دارد.

مختصری هم دربارهٔ *زینگرها* - پدر و پسر - گفت‌وگو کنیم.

واسیلی یاکوله‌ویچ زینگر، بنیان‌گذار مکتب هندسی در دانشگاه مسکو است. به‌جز آن، او استاد مسلم گیاه‌شناسی بود و در این رشتهٔ از دانش تجربی


زینگر

موفقیت‌های زیادی به دست آورد: او، علاوه بر دکترای ریاضیات، در رشتهٔ گیاه‌شناسی هم، به درجهٔ دکتری رسید. یکی از پسرهای او، استاد گیاه‌شناسی، دیگری، استاد نجوم و سومی الکساندر واسیلویچ ـ استاد فیزیک شد.این پسر آخر، علاقهٔ به گیاه‌شناسی را از پدر خود به ارث برده است و علاوه بر کتاب‌های زیادی که در زمینهٔ فیزیک نوشته است، کتابی به نام «سرگرمی‌های گیاه‌شناسی» هم تألیف کرده است که خیلی بیشتر از کتاب‌هایی که دربارهٔ گیاه‌شناسی، به وسیله خبرگانِ این دانش، نوشته شده است، مورد استقبال قرار گرفته است.

ل. ن. تولستوی، شخصیت هر فرد را با یک کسر اندازه‌گیری می‌کند، صورت این کسر عبارت است از ارزشی که او برای دیگران دارد و آن را می‌توان کم و بیش، نزدیک به واقعیت، ارزیابی کرد. مخرج کسر عبارت است از اعتقادی که این فرد نسبت به خودش دارد که اغلب با واقعیت نمی‌سازد و بیشتر مبالغه آمیز است.

ل. ن. تولستوی، دربارهٔ *آ.و.*زینگر می‌گوید:

«مخرج کسری که برای زینگر به‌دست می‌آید، بسیار کوچک است و بنابراین، خود کسر، عددی بزرگ است».

۲. مساله‌ای دربارهٔ سه دوچرخه‌سوار

سه جوان از نقطهٔ A به طرف B حرکت می‌کنند. فاصلهٔ A تا B برابر ۳۶ کیلومتر است. جوان‌ها، یک دوچرخه دارند، ولی تنها دو نفر می‌توانند بر آن سوار شوند. درضمن می‌دانیم سرعت دوچرخه، سه برابر سرعت پیاده است.

جوان‌ها، تصمیم گرفتند به این ترتیب عمل کنند. دو نفر بر دوچرخه، و نفر سوم پیاده، حرکت کنند. دوچرخه‌سوار، تا نقطه‌ای مثل C می‌رود، در آن‌جا، نفر دوم را پیاده می‌کند تا خودش با پای پیاده راه را ادامه دهد.

دوچرخه سوار به عقب برمی‌گردد و در جایی، مثل نقطهٔ D، به جوان سوم می‌رسد، او را سوار می‌کند و بلافاصله به طرف B حرکت می‌کند.

نقطه‌های C و D، در چه فاصله‌ای از A قرار دارند، به شرطی که بدانیم هر سه جوان، با هم به نقطهٔ B، مقصد خود، رسیده باشند؟

فرض بر این است که دوچرخه، سرعتی یکنواخت دارد و سرعت پیاده برای هر سه جوان، یکی است.

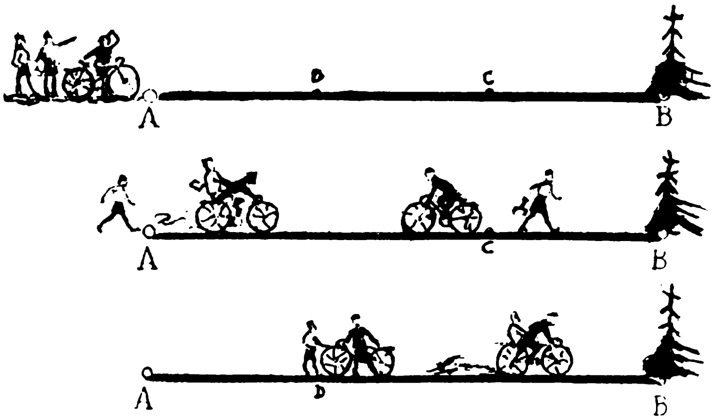
حل. اگر از شکل استفاده کنیم، مساله به سادگی حل می‌شود.

جوان اول، در تمام راه بر دوچرخه سوار بوده است. جوان دوم از A تا C را با دوچرخه و از C تا B را پیاده رفته است. جوان سوم از A تا D را پیاده و از D تا B را با دوچرخه رفته است.

هر سه جوان، راه خود را در یک مدت زمانی طی کرده‌اند.

در زمانی که جوان دوم، فاصلهٔ CD را، پیاده می‌رود، دوچرخه‌سوار، راه $CD + DC + CB$ را طی می‌کند. چون سرعت دوچرخه، سه برابر سرعت پیاده است، باید فاصلهٔ $CD + DC + CB$ مساوی با سه برابر فاصلهٔ CB باشد، یعنی داشته باشیم:

$$CD + DC + CB = ۳CB$$



ولی $CD + DC = ۲DC$ و از آن‌جا

$$۲DC + CB = ۳CB$$
$$۲DC = ۲CB$$
$$DC = CB$$

در همان زمانی که جوان سوم فاصلهٔ AD را طی می‌کند، دوچرخه‌سوار، راه $AD + DC + CD$ را می‌رود، که بنابر شرط مساله، باید برابر با سه برابر راه AD باشد:

$$AD + DC + CD = ۳AD,$$
$$AD + ۲DC = ۳AD,$$
$$۲DC = ۲AD,$$
$$DC = AD$$

به این ترتیب، به دست می‌آید:

$$DC = CB, \ DC = AD$$

دو پاره‌خط CB و AD، که برابر با یک پاره‌خط سوم DC هستند، خود با هم برابر می‌شوند و به دست می‌آید:

$$AD = DC = CB$$

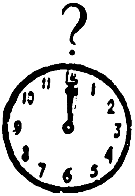
یعنی، نقطه‌های D و C، پاره‌خط AB را به سه قسمت برابر، تقسیم می‌کنند:

$$AD = ۱۲ \text{ (کیلومتر)} \ , \ AC = ۲۴ \text{ (کیلومتر)}$$

۳. مساله‌ای دربارهٔ عقربه‌های ساعت.

در جریان ۱۲ ساعت، با شروع از ۰ ساعت و ۰ دقیقه، در چه لحظه‌هایی عقربهٔ دقیقه‌شمار، روی عقربهٔ ساعت‌شمار قرار می‌گیرد؟

در *حل حسابی (جبری)* مساله، باید برای هر ساعت، به طور جداگانه، محاسبه کرد.



برای ساعت دوم، به این ترتیب استدلال می‌کنیم. در ساعت ۱ ، عقربهٔ دقیقه‌شمار، روی عدد ۱۲ صفحهٔ ساعت و عقربهٔ ساعت‌شمار روی عدد ۱ ، قرار دارد، یعنی به اندازهٔ پنج واحد، از قسمت‌های روی محیط صفحهٔ ساعت، با هم فاصله دارند. برای این‌که دو عقربه روی هم قرار گیرند، باید عقربهٔ دقیقه‌شمار $x + ۵$ واحد از این قسمت‌ها و عقربهٔ ساعت شمار x واحد را طی کنند. چون، سرعت عقربهٔ دقیقه شمار، ۱۲ برابر سرعت عقربهٔ ساعت شمار است و در راس ساعت ۱ ، هردو با هم حرکت می‌کنند، باید داشته باشیم:

$$۵ + x = ۱۲x$$

از آن‌جا $۵ = ۱۱x$ و $x = \frac{۵}{۱۱}$ می‌شود. عقربهٔ دقیقه‌شمار، در این مدت $۵\frac{۵}{۱۱}$ واحد از تقسیم‌های صفحهٔ ساعت را طی می‌کند. بنابراین، دو عقربه در ساعت ۱ و $۵\frac{۵}{۱۱}$ دقیقه، روی هم قرار می‌گیرند.

به همین ترتیب، برای ساعت دوم هم به دست می‌آوریم:

$$۱۰ + y = ۱۲y,\ ۱۱y = ۱۰,\ y = \frac{۱۰}{۱۱}$$

یعنی در ساعت ۲ و $۱۰\frac{۱۰}{۱۱}$ دقیقه، دوباره دو عقربهٔ ساعت روی هم قرار می‌گیرند.

اگر با همین روش، لحظهٔ انطباق دو عقربه را، برای هریک از ساعت‌های بعدی، محاسبه کنیم، جدول زیر را برای انطباق دو عقربه، به دست می‌آوریم:

ساعت دقیق	گرد شدهٔ آن
۰ ساعت و ۰ دقیقه	۰ ساعت و ۰ دقیقه
۱ ساعت و $\frac{۵}{۱۱}$۵ دقیقه	۱ ساعت و ۵/۴ دقیقه
۲ ساعت و $\frac{۱۰}{۱۱}$۱۰ دقیقه	۲ ساعت و ۱۰/۹ دقیقه
۳ ساعت و $\frac{۴}{۱۱}$۱۶ دقیقه	۳ ساعت و ۱۶/۴ دقیقه
۴ ساعت و $\frac{۹}{۱۱}$۲۱ دقیقه	۴ ساعت و ۲۱/۸ دقیقه
۵ ساعت و $\frac{۳}{۱۱}$۲۷ دقیقه	۵ ساعت و ۲۷/۳ دقیقه
۷ ساعت و $\frac{۲}{۱۱}$۳۸ دقیقه	۷ ساعت و ۳۸/۲ دقیقه
۶ ساعت و $\frac{۸}{۱۱}$۳۲ دقیقه	۶ ساعت و ۳۲/۷ دقیقه
۸ ساعت و $\frac{۷}{۱۱}$۴۳ دقیقه	۸ ساعت و ۴۳/۶ دقیقه
۹ ساعت و $\frac{۱}{۱۱}$۴۹ دقیقه	۹ ساعت و ۴۹/۱ دقیقه
۱۰ ساعت و $\frac{۶}{۱۱}$۵۴ دقیقه	۱۰ ساعت و ۵۴/۵ دقیقه
۱۱ ساعت و ۶۰ دقیقه	۱۱ ساعت و ۶۰ دقیقه

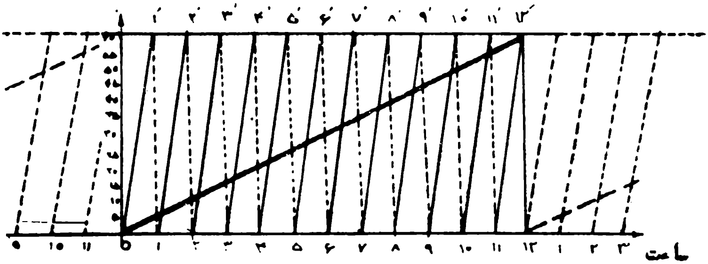
آخرین انطباق، در ساعت ۱۲ است و بنابراین، همان جایی است که دو عقربه در ابتدا بر هم قرار گرفته بودند.

جدول نشان می‌دهد که دو عقربه، بعد از هر $\frac{۵}{۱۱}$۶۵ دقیقه یک بار، روی هم قرار می‌گیرند، در فاصلهٔ زمانی هر دو انطباق، عقربهٔ دقیقه‌شمار به اندازهٔ x واحد و عقربهٔ ساعت‌شمار به اندازهٔ $۶۰ - x$ واحد، از تقسیم‌های

صفحهٔ ساعت را طی می‌کند؛ درضمن سرعت عقربهٔ دقیقه‌شمار، ۱۲ برابر سرعت عقربهٔ ساعت‌شمار است:

$$\frac{x}{۱۲} = x - ۶۰,\ x - \frac{x}{۱۲} = ۶۰,\ \frac{۱۱}{۱۲}x = ۶۰,\ x = ۶۵\frac{۵}{۱۱}$$

حل مساله، به کمک شکل. روی محور x (محور طول)، زمان را، از ساعت ۱ تا ۱۲ و روی محور y (محور عرض)، تقسیم‌های صفحهٔ ساعت را قرار می‌دهیم. به این ترتیب، هر واحد محور عرض، نمایندهٔ یک دقیقه زمان خواهد بود. نمایش وضع عقربهٔ ساعت‌شمار، به وسیلهٔ خط راستی نشان داده می‌شود که از نقطهٔ $(۰, ۰)$ به نقطهٔ $(۱۱, ۶۰)$ رفته است.

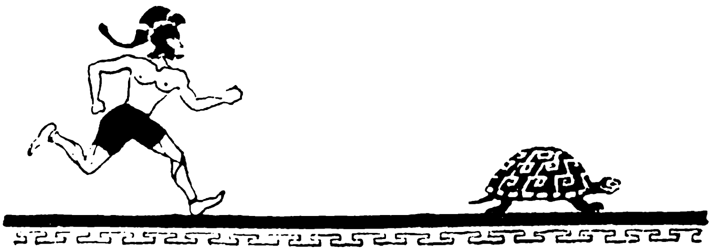


نمایش وضع عقربهٔ دقیقه‌شمار، برای هر ساعت پاره‌خط راستی است: برای ساعت اول از نقطهٔ $(۰, ۰)$ به نقطه $(۱, ۶۰)$؛ برای ساعت دوم از نقطهٔ $(۱, ۰)$ به نقطهٔ $(۲, ۶۰)$ و غیره.

لحظه‌های انطباق عقربه‌ها، متناظر با نقطه‌هایی است که در آن‌جا، نمایش وضع عقربهٔ ساعت‌شمار (پاره‌خط کلفت) با نمایش وضع عقربهٔ دقیقه‌شمار (۱۲ پاره‌خط نازک)، به هم رسیده‌اند. اگر، واحد محورها را بزرگ انتخاب و شکل را دقیق رسم کنیم، می‌توان همان عددهای گرد شدهٔ ستون دوم جدول را، برای لحظه‌های انطباق دو عقربه به دست آورد: ساعت انطباق روی محور x و دقیقه‌های آن روی محور y (فاصلهٔ نقطهٔ برخورد تا محور x) پیدا می‌شود. مثلاً، بین ساعت‌های ۹ و ۱۰، دیده می‌شود که، فاصلهٔ بین

نقطهٔ برخورد تا محور x، کمی بیشتر از ۴۹ واحد است، یعنی دو عقربه در ساعت ۹ و ۴۹/۱ دقیقه روی‌هم قرار می‌گیرند.

یادداشت. وقتی بخواهیم، مساله را برای حالتی که ساعت ۰ و ۰ دقیقه است حل کنیم، چون عقربهٔ دقیقه‌شمار، عقربهٔ ساعت‌شمار را تعقیب می‌کند، حالت خاصی از مساله قدیمی مربوط به آشیل و لاک‌پشت می‌شود. (آشیل قهرمان افسانه‌ای سرعت در یونان). بنابراین مساله، باید به این پرسش، پاسخ دهیم: اگر سرعت آشیل، ۱۰ برابر سرعت لاک‌پشت باشد، و لاک‌پشت مثلاً به اندازهٔ یک واحد طول از آشیل، جلوتر باشد، آیا آشیل به لاک‌پشت می‌رسد؟ در زمانی که آشیل، فاصلهٔ برابر یک واحد را می‌دود، لاک‌پشت به اندازهٔ $\frac{1}{10}$ واحد به جلو می‌رود؛ وقتی آشیل این $\frac{1}{10}$ را می‌رود: لاک‌پشت باز هم به اندازهٔ $\frac{1}{100}$ به پیش می‌رود، وقتی که آشیل این $\frac{1}{100}$ را طی می‌کند، لاک‌پشت به اندازهٔ $\frac{1}{1000}$ فاصله نخستین، از او جلو می‌افتد و غیره. ممکن است به نظر برسد که آشیل، هرگز به لاک‌پشت نمی‌رسد، زیرا در هر حال کسری از فاصلهٔ نخستین ـ ولو کوچک، بین آن‌ها قرار دارد.



در دورهٔ دبیرستانی ثابت می‌شود که اگر بخواهیم فاصله‌ای را که آشیل تا لحظهٔ رسیدن به لاک‌پشت طی کرده است، به دست آوریم، باید چنین عمل

کنیم.

$$۱+\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۱۰۰}+\frac{۱}{۱۰۰۰}+\ldots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۱۰}}=\frac{۱۰}{۹}$$

یعنی، وقتی که آشیل به اندازهٔ $\frac{۱۰}{۹}$ فاصله نخستین بین خود و لاک‌پشت را طی کنید، به لاک‌پشت می‌رسد. زمانی که برای طی این فاصله لازم است، برابر است با: $\frac{۱۰}{۹}V$ ($V-$ سرعت آشیل).

در پرسش مربوط به عقربه‌های ساعت هم، با همین مساله سروکار داریم.

در ۰ ساعت و ۰ دقیقه، عقربه‌های دقیقه‌شمار و ساعت‌شمار، بر هم منطبق‌اند. برای این‌که عقربهٔ دقیقه‌شمار، یک بار دیگر، عقربهٔ ساعت‌شمار را بپوشاند، باید یک دور کامل بچرخد و بعد $\frac{۱}{۱۲}$ دور را، که در این مدت عقربهٔ ساعت‌شمار جلو رفته است، طی کند. در مدتی که عقربهٔ دقیقه‌شمار، این $\frac{۱}{۱۲}$ دور را جلو می‌رود، عقربهٔ ساعت‌شمار $\frac{۱}{۱۲^۲}$ دور جلو می‌رود و غیره؛ درست مثل مسالهٔ آشیل و لاک‌پشت.

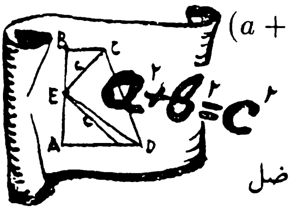
برای این‌که عقربهٔ دقیقه‌شمار، به عقربهٔ ساعت‌شمار برسد، باید به اندازهٔ

$$۱+\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲^۲}+\frac{۱}{۱۲^۳}+\ldots=\frac{۱}{۱-\frac{۱}{۱۲}}=\frac{۱۲}{۱۱}$$

دور دایره را طی کند، که برابر است با $۱\frac{۱}{۱۱}$ ساعت، یعنی ۱ ساعت و $۵\frac{۵}{۱۱}$ دقیقه.

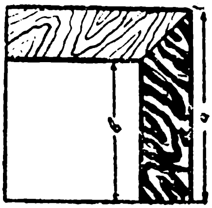
درس چهارم

چگونه می‌توان از شکل برای
به‌دست آوردن دستور استفاده کرد؟

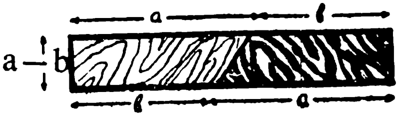


۱. اثبات رابطهٔ $(a+b)(a-b) = a^۲ - b^۲$ به کمک شکل.

حل. دو مربع داریم: یکی به ضلع a و دیگری به ضلع b. سطحی را که برابر با تفاضل مساحت این دو مربع است، سایه می‌زنیم. روشن است که این سطح برابر است با $a^۲ - b^۲$



$a^۲ - b^۲$



$(a+b)\,(a-b)$

قسمت سایه خورده را، آن طور که در شکل دیده می‌شود، جدا می‌کنیم و کنار هم می‌گذاریم. مساحت مستطیلی که به‌دست می‌آید، برابر است با

حاصل‌ضرب طول در عرض آن، یعنی

$$(a+b)(a-b)$$

برای قسمت سایه خوردهٔ مساحت، دو عبارت به دست آمده است و بنابراین

$$\boxed{(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲}$$

یادداشت. این نتیجه را می‌توان برای اثبات یک حکم بسیار مهم به‌کار برد:

در مستطیل‌هایی که محیط برابر دارند، مستطیلی دارای مساحت حداکثر است که طول و عرض برابر داشته باشد، یعنی مربعی با همان محیط.

اثبات. ضلع بزرگتر مستطیل را $a+b$ و ضلع کوچکتر آن را $a-b$ می‌گیریم. در این صورت، محیط مستطیل برابر است با

$$۲(a+b)+۲(a-b)=۴a$$

و مساحت آن

$$(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$$

روشن است که مساحت $a^۲-b^۲$، وقتی حداکثر می‌شود که $b=۰$ باشد. در این حالت، هر دو ضلع مستطیل برابر a و مستطیل به مربع تبدیل می‌شود.

مثال عددی. ضلع‌های مستطیل را ۱۹ و ۱۳ می‌گیریم؛ محیط مستطیل، چنین می‌شود:

$$۲\times ۱۹+۲\times ۱۳=۶۴=۴\times ۱۶$$

از همهٔ مستطیل‌های به محیط برابر ۶۴، مساحت حداکثر، متعلق به مربعی به ضلع ۱۶ است. این نتیجه را آزمایش کنیم.

مساحت مربع به ضلع ۱۶، برابر است با $۱۶^۲$، یعنی ۲۵۶.

مستطیل به ضلع‌های ۱۷ و ۱۵، مساحتی برابر ۱۵ × ۱۷، یعنی ۲۵۵ دارد.

وقتی محیط مستطیل را ۶۴ بگیریم، هرچه اختلاف طول و عرض آن بیشتر باشد، مقدار مساحت آن، کوچکتر می‌شود.

طول	عرض	مساحت
۱۶	۱۶	۲۵۶
۱۷	۱۵	۲۵۵
۱۸	۱۴	۲۵۲
...	...	...
۳۰	۲	۶۰
۳۱	۱	۳۱

مشاهدهٔ این جدول، حکمی را که ثابت کردیم، تایید می‌کند:

از بین مستطیل‌های با محیط برابر، مساحت حداکثر، متعلق به مربع است.

این حکم را به‌ترتیب دیگری هم می‌توان تنظیم کرد: *حاصل‌ضرب دو عاملی که مجموع آن‌ها مقدار ثابتی است، وقتی حداکثر است که این دو عامل برابر باشند.*

یادداشت ۱. بسیاری از ملت‌های باستانی ـ و چه‌بسا، همهٔ آن‌ها گمان می‌کردند اگر دو شکل، محیط برابر داشته باشند، هم‌ارزند (یعنی مساحت‌های برابر دارند). مثلاً *هوراتیوس* (سال‌های ۶۵ـ۸ پیش از میلاد)، نویسندهٔ رومی، معاصران خود را به خاطر داشتن چنین نظرگاه نادرستی، سرزنش می‌کند. براساس این نظرگاه، مثلاً گمان می‌کردند که مربع با دایره‌ای که محیطی برابر با آن دارد، هم‌ارز است. نادرستی چنین اعتقادی روشن است.

محیط دایره، برابر است با $۶/۲۸r$ (r، شعاع دایره است) و مساحت آن $۳/۱۴r^۲$ (هر دو مقدار، تقریبی هستند). اگر نخی را دور دایره بگردانیم و با آن نخ، مربعی درست کنیم، ضلع این مربع برابر با $\frac{۶/۲۸r}{۴}$ یا $\frac{۳/۱۴r}{۲}$ و بنابراین، مساحت آن برابر با $\frac{۳/۱۴^۲r^۲}{۴}$ می‌شود، و این عدد برابر با عدد $۳/۱۴r^۲$، یعنی مساحت دایره نیست.

یادداشت ۲. در داستان *ل. ن. تولستوی* به نام «آیا مردم به زمین زیادی نیاز دارند»، با شقیرها، قطعه‌ای از زمین را که بتوان در یک روز دور زد به ۱۰۰۰ روبل می‌فروختند. *پاخوم*، خریدار طمع‌کار که می‌خواست در ازای ۱۰۰۰ روبل خود، زمین زیادی به دست آورد، چنان به سرعت دوید، که تمام نیروی خود را از دست داد و در غروب آفتاب که خود را به باشقیرها رسانده بود، همان‌جا افتاد و مرد. روشن است که اگر *پاخوم* تصمیم می‌گرفت حرکت خود را روی زمینی به شکل مربع انجام دهد، به زمینی با مساحت بزرگتر می‌رسید. (برای آگاهی بیشتر از مسالهٔ *تولستوی*، به کتاب «سرگرمی‌های هندسه» نوشتهٔ *پرلمان*، ترجمهٔ فارسی، صفحه ۳۷۱ مراجعه کنید.)

از میان همهٔ شکل‌هایی که محیط برابر دارند، مساحت دایره از همه بیشتر است.

چند کاربرد از دستور $(a+b)(a-b)=a^۲-b^۲$.

۱. پیدا کردن سریع حاصل‌ضرب بعضی عددها:

$$۹۷ \times ۱۰۳ = (۱۰۰ - ۳)(۱۰۰ + ۳) = ۱۰۰۰۰ - ۹ = ۹۹۹۱$$

$$۵۴ \times ۴۶ = (۵۰ + ۴)(۵۰ - ۴) = ۲۵۰۰ - ۱۶ = ۲۴۸۴, \ldots$$

$$۱۹ \times ۱۳ = (۱۶ + ۳)(۱۶ - ۳) = ۲۵۶ - ۹ = ۲۴۷,$$

$$۲۶ \times ۱۴ = (۲۰ + ۶)(۲۰ - ۶) = ۴۰۰ - ۳۶ = ۳۶۴, \ldots$$

۲. از $(a+b)(a-b) = a^{۲} - b^{۲}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$a^{۲} = (a+b)(a-b) + b^{۲}$$

اگر مجذور عددهایی را که خیلی بزرگ نباشد، به خاطر داشته باشیم، می‌توان به این ترتیب عمل کرد:

$$۸۳^{۲} = (۸۳ + ۱۷)(۸۳ - ۱۷) + ۱۷^{۲} = ۱۰۰ \times ۶۶ + ۲۸۹ = ۶۸۸۹,$$

$$۹۷۸^{۲} = (۹۷۸ + ۲۲)(۹۷۸ - ۲۲) + ۲۲^{۲} = ۱۰۰۰ \times ۹۵۶ + ۴۸۴ = ۹۵۶۴۸۴$$

۳. تساوی‌های جالب:

$$۶^{۲} - ۵^{۲} = ۱۱$$

$$۵۶^{۲} - ۴۵^{۲} = ۱۱۱۱$$

$$۵۵۶^{۲} - ۴۴۵^{۲} = ۱۱۱۱۱۱$$

$$۵۵۵۶^{۲} - ۴۴۴۵^{۲} = ۱۱۱۱۱۱۱۱$$

$$۵۵۵۵۶^{۲} - ۴۴۴۴۵^{۲} = ۱۱۱۱۱۱۱۱۱۱$$

این تساوی‌ها، به این ترتیب تشکیل می‌شوند. مثلاً، فرض کنید $a + b = ۱۰۰۱$ و $a - b = ۱۱۱$، برای پیدا کردن a و b داریم:

$$a + b = ۱۰۰۱$$

$$a - b = ۱۱۱$$

اگر این دو رابطه را یک بار با هم جمع و یک بار از هم کم کنیم، به دست می‌آید:

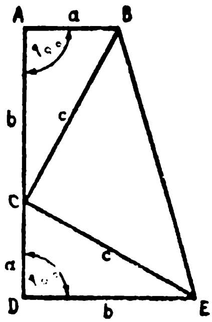
$$۲a = ۱۱۱۲, \ a = ۵۵۶$$

$$۲b = ۸۹۰, \ b = ۴۴۵$$

اگر $a + b$ و $a - b$ را به‌ترتیب ۱۰۱ و ۱۱ یا ۱۰۰۰۱ و ۱۱۱۱ و غیره بگیریم، بقیهٔ عددهای جدول به دست می‌آید.

۲. اثبات قضیه به کمک شکل

ذوزنقهٔ $ADEB$ را طوری در نظر می‌گیریم که قاعده‌های آن به ترتیب برابر با a و b، زاویه‌های A و D از آن قائمه، و ارتفاع آن برابر با $a + b$ باشد.



فرض کنید نقطهٔ C، ارتفاع ذوزنقه را به قسمت‌های a و b تقسیم کند. نقطهٔ C را به نقطه‌های B و E و پاره‌خط‌های مساوی BC و CE را با حرف c نشان می‌دهیم (تساوی این دو پاره‌خط، از تساوی دو مثلث ABC و CDE، نتیجه می‌شود).

مساحت ذوزنقه برابر است با

$$\frac{a+b}{۲} \cdot (a+b) = \frac{a^۲ + ۲ab + b^۲}{۲} = ab + \frac{a^۲ + b^۲}{۲}$$

مثلث BCE قائم‌الزاویه است، زیرا مجموع دو زاویهٔ ACB و DCE مساوی ۹۰ درجه است و بنابراین زاویهٔ BCE هم برابر با ۹۰ درجه می‌شود.

حالا، مساحت ذوزنقه را، به عنوان مجموع مساحت‌های سه مثلث قائم‌الزاویه، در نظر می‌گیریم. در این صورت، مساحت ذوزنقه، چنین

می‌شود:

$$\frac{ab}{۲}+\frac{ab}{۲}+\frac{c^{۲}}{۲}=ab+\frac{c^{۲}}{۲}$$

با مساوی قرار دادن دو مقداری که برای مساحت ذوزنقه به دست آمد، خواهیم داشت:

$$ab+\frac{a^{۲}+b^{۲}}{۲}=ab+\frac{c^{۲}}{۲}$$

که از آن‌جا به سادگی معلوم می‌شود:

$$a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$$

یعنی، مجموع مجذورهای دو ضلع مثلث قائم‌الزاویه، برابر است با مجذور وتر (فرض بر این است که ضلع‌های مثلث را، با یک واحد اندازه گرفته‌ایم).

درس پنجم

دربارهٔ حل بعضی مساله‌های
مربوط به عددهای طبیعی

ما، برای حل مساله‌ها، از عددهای مختلف استفاده می‌کنیم (در حساب: عددهای درست، کسری، صفر، در جبر: عددهای منفی و غیره). عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و غیره را *عددهای طبیعی* گویند. این عددها، ضمن شمردن چیزها، و پیش از دیگر عددها، پیدا شده‌اند. دنبالهٔ عددهای طبیعی

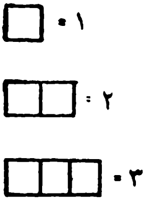
۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, . . .

را، که می‌توانیم تا هرجا که بخواهیم ادامه دهیم، *دنبالهٔ عددهای طبیعی* گویند (نقطه‌های بعد از ۸، به معنای این است که می‌توان شمار را تا هرجا که بخواهیم ادامه دهیم).

عددهای طبیعی، مبنای تشکیل همهٔ عددهای دیگرند. آموزش مربوط به عددهای طبیعی، که در چهار سال اول دبستان انجام می‌گیرد، اساس آموزش

ریاضی در سال‌های بعد است و تسلط بر خاصیت‌های عددهای طبیعی، برای این آموزش ریاضی، اهمیت جدی دارد.

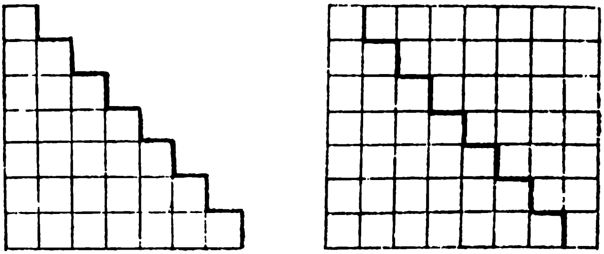
چند مسالهٔ ساده مربوط به دنبالهٔ عددهای طبیعی را حل می‌کنیم. یک عدد طبیعی غیر مشخص را، با n نشان می‌دهیم، در این صورت، عدد طبیعی بعد از آن، با اضافه کردن یک واحد، به دست می‌آید و به صورت ۱ + n نشان داده می‌شود. خاصیت اصلی دنبالهٔ عددهای طبیعی این است که بعد از هر عدد n از آن، عدد ۱ + n قرار گرفته است.



محاسبهٔ مجموع n عدد طبیعی نخستین

۱ + ۲ + ۳ + ... + n

عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶ و ۷ را به ترتیب، با تعداد مربع‌ها نشان می‌دهیم: اگر این مربع‌ها را پهلوی هم قرار دهیم حاصل ۷ + ۶ + ۵ + ۴ + ۳ + ۲ + ۱ به دست می‌آید.



تعداد خانه‌های این شکل برابر است با حاصل مجموع

۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷

اگر از این شکل، دو نمونه درست کنیم و آن‌ها را، آنطور که در شکل

می‌بینید، پهلوی هم بگذاریم، مستطیلی به دست می‌آید که ضلع آن (ارتفاع)، ۷ خانه، پیدا می‌کند. بنابراین روی‌هم به اندازهٔ ۸×۷ خانه در آن وجود دارد.

چون، هرکدام از شکل‌های مثلثی، نمایندهٔ مجموع $۷ + \ldots + ۲ + ۱$ و مستطیل ما، شامل دوتا از این شکل‌های مثلثی است، بنابراین تعداد خانه‌های مستطیل برابر با دو برابر مجموع $۷ + \ldots + ۲ + ۱$ می‌شود.

درنتیجه

$$۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + ۶ + ۷ = \frac{۷ \times ۸}{۲}$$

روشن است که می‌توان همین روش را، که برای محاسبهٔ مجموع هفت عدد نخستین به‌کار بردیم، برای محاسبهٔ مجموع هر n عدد طبیعی نخستین به کار ببریم. اگر به‌جای عدد ۷، حرف n را بگذاریم، به‌دست می‌آید:

$$\boxed{۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n - ۱) + n = \frac{n(n + ۱)}{۲}}$$

قاعده. *برای پیدا کردن مجموع n عدد طبیعی نخستین، باید عدد n را در عدد طبیعی بعد از آن ضرب کرد و سپس حاصل‌ضرب را بر ۲ تقسیم کرد*

مثلاً

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۱۰۰ = \frac{۱۰۰ \times ۱۰۱}{۲} = ۵۰۵۰,$$

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + ۲۰۰ = \frac{۲۰۰ \times ۲۰۱}{۲} \equiv ۲۰۱۰۰, \ldots$$

نقل کرده‌اند که *کارل فردریک گوس* (۱۷۷۷_۱۸۵۵)، ریاضی‌دان مشهور

آلمانی، در شش سالگی، این قاعده را کشف کرد. او عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را، که می‌خواست مجموع آن‌ها را پیدا کند، به این ترتیب، دو بار زیر هم نوشت:

$$\begin{array}{ccccccccccccc} ۱ & + & ۲ & + & ۳ & + & \quad & + & ۹۸ & + & ۹۹ & + & ۱۰۰ \\ ۱۰۰ & + & ۹۹ & + & ۹۸ & + & \quad & + & ۳ & + & ۲ & + & ۱ \end{array}$$


گوس

متوجه شد که مجموع هر دو عددی که در یک ستون قرار گرفته است، برابر با ۱۰۱ می‌شود. روی‌هم ۱۰۰ ستون وجود دارد و بنابراین مجموع آن‌ها برابر با ۱۰۰× ۱۰۱ می‌شود؛ این حاصل‌ضرب را باید نصف کرد، زیرا هر عدد، دو بار نوشته شده است. به این ترتیب، ریاضی‌دان شش ساله، نخستین کشف، از کشف‌های بسیار مهم خود را ارائه داد:

$$۱+۲+۳+\ldots+(n-۱)+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

۲. دربارهٔ عددهای فرد

فیثاغورث، ریاضی‌دان یونانی (سدهٔ ششم پیش از میلاد، یعنی بیش از ۲۵۰۰ سال پیش)، عددهای طبیعی را، به *عددهای زوج و عددهای فرد* تقسیم کرد. عددهایی را زوج نامید که در تقسیم بر ۲، باقی‌مانده نداشته باشند (یعنی بتوان آن‌ها را به صورت مجموع دو عدد مساوی نوشت)؛ بقیهٔ عددهای طبیعی را، فرد نامید.

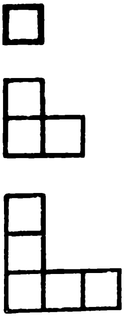
یکی از کتاب‌های ویژه‌ای که در زمان ما، دربارهٔ حساب عالی (یا نظریهٔ عددها) نوشته شده است، دراین‌باره می‌گوید: «به فیثاغورث و شاگردان او، کشف‌های بسیار مهمی در ریاضیات، نسبت داده‌اند. یکی از کشف‌ها (و نه آخرین آن‌ها)، تقسیم عددهای طبیعی، به زوج و فرد است. با همین گام است که دانش حساب، آغازمی‌شود، و سپس‌در طول هزارهاسال‌بعد از آن،

بشر، برای نیازهای زندگی خود، از عدد استفاده کرده است». این کشفی که تا این اندازه مهم است و در ۲۵۰۰ سال پیش، انجام گرفت، امروز، در سال چهارم دبستان، به دانش‌آموزان آموخته می‌شود. یکی از مساله‌های حساب را، که به عددهای فرد بستگی دارد، حل می‌کنیم.

محاسبهٔ مجموع n عدد طبیعی فرد نخستین

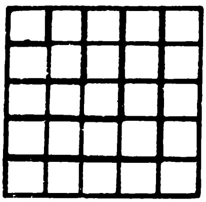
$$۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲n - ۳) + (۲n - ۱)$$

در این‌جا، n عدد طبیعی فرد نخستین، نوشته شده است. نخستین عدد فرد، یعنی ۱ را می‌توان این‌طور نوشت: $۲ \times ۱ - ۱$، دومین عدد فرد: $۲ \times ۲ - ۱ = ۳$؛ سومین عدد فرد: $۲ \times ۳ - ۱ = ۵$ و سرانجام، nامین عدد فرد: $۲n - ۱$؛ $(n - ۱)$امین عدد فرد: $۲(n - ۱) - ۱ = ۲n - ۳$.



با انتخاب ۵ عدد فرد نخستین، به کمک شکل‌های متناظر آن‌ها، شکل تازه‌ای درست می‌کنیم که مجموع این عددها را بدهد، مربعی به دست می‌آوریم که شامل $۲۵ = ۵^۲$ خانه است:

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ = ۲۵$$



این روش را برای هر تعداد دلخواهی از n عدد فرد نخستین می‌توان به کار برد. این قاعده پیدا می‌شود.

مجموع هر تعدادی از عددهای طبیعی فرد نخستین، برابر است با مجذور تعداد جمله‌ها.

$$\boxed{۱ + ۳ + ۵ + \ldots + (۲n - ۱) = n^۲}$$

مثلاً، مجموع ۱۰۰ عدد فرد نخستین

$$۱ + ۳ + ۵ + \ldots + ۱۹۹ = ۱۰۰^۲ = ۱۰۰۰۰,$$

و مجموع ۵۰ عدد فرد نخستین

$$۱ + ۳ + ۵ + \ldots + ۹۹ = ۵۰^۲ = ۲۵۰۰$$

مجموع عددهای فرد نخستین را، با همان روش حل مسالهٔ اول هم، می‌توانستیم به دست آوریم.

در یک سطر، مجموع n عدد طبیعی نخستین و در سطر دوم، مجموع $(n - ۱)$ عدد طبیعی نخستین را به ترتیب زیر می‌نویسیم:

$$\begin{array}{l} ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + ۵ + \ldots + (n - ۱) + n \\ \quad\quad ۱ + ۲ + ۳ + ۴ + \ldots + (n - ۲) + (n - ۱) \end{array}$$

حالا، اگر عددهای هر ستون را با هم جمع کنیم، به دست می‌آید:

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + \ldots + (۲n - ۳) + (۲n - ۱)$$

یعنی، مجموع n عدد فرد نخستین از دنبالهٔ عددهای طبیعی، برابر است با مجموع n عدد طبیعی نخستین به‌اضافهٔ $(n - ۱)$ عدد طبیعی نخستین، چون مجموع n عدد طبیعی نخستین برابر $\frac{n(n + ۱)}{۲}$ و مجموع $(n - ۱)$ عدد طبیعی نخستین برابر $\frac{(n - ۱)n}{۲}$ است، مجموع n عدد طبیعی فرد

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + \ldots + (۲n - ۱)$$

را می‌توان محاسبه کرد:

$$۱ + ۳ + ۵ + ۷ + \ldots + (۲n - ۳) + (۲n - ۱) =$$

$$= (۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n) + (۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n - ۱) =$$
$$= \frac{n(n+۱)}{۲} + \frac{(n-۱)n}{۲} = \frac{n^۲ + n + n^۲ - n}{۲} = \frac{۲n^۲}{۲} = n^۲$$

دوباره به همان قاعده، رسیدیم:

مجموع n عدد فرد طبیعی نخستین، برابر است با $n^۲$.

۳. محاسبهٔ مجموع مجذورهای n عدد طبیعی نخستین

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + ۴^۲ + \ldots + n^۲$$

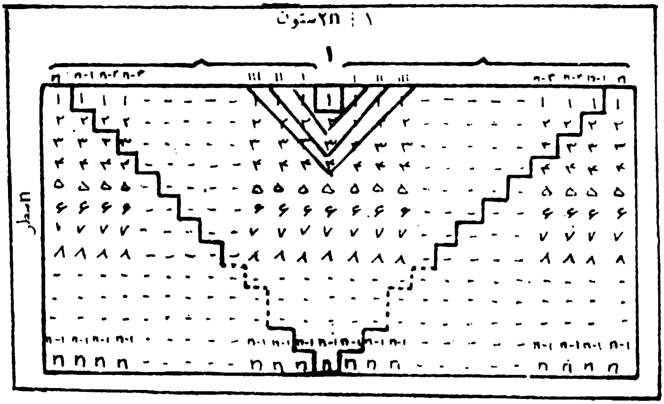
این مجموع را هم می‌توان به کمک شکل پیدا کرد، ولی استفاده از شکل دشوارتر از راهی است که ما در این‌جا می‌آوریم.

جدول‌عددی مستطیل شکلی‌درست‌می‌کنیم که‌دارای nسطر و $(۲n + ۱)$ ستون باشد. در هر ستون، از بالا به پایین، n عدد طبیعی نخستین را می‌نویسیم. مجموع عددهای هر سطر را می‌دانیم:

$$۱ + ۲ + ۳ + \ldots + n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

چون تعداد ستون‌ها، برابر $۲n + ۱$ است، مجموع همهٔ عددهای جدول، چنین می‌شود:

$$\frac{n(n+۱)}{۲} \times (۲n + ۱) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲}$$



جدول را، به کمک خط شکسته، به سه قسمت تقسیم می‌کنیم (آن‌طور که در شکل می‌بینید)، روشن است، دو قسمتی از جدول که زیر خط شکسته، سمت چپ و سمت راست قرار دارد، با هم برابرند، مجموع عددها را در هر قسمت جدول، محاسبه می‌کنیم.

قسمت چپ زیر خط شکسته را در جدول در نظر می‌گیریم. عددهای سطرها، چنین‌اند:

$$۱ = ۱^۲$$

$$۲ + ۲ = ۲^۲$$

$$۳ + ۳ + ۳ = ۳^۲$$

$$۴ + ۴ + ۴ + ۴ = ۴^۲$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underbrace{n + n + \ldots + n}_{n\text{مرتبه}} = n^۲$$

یعنی، مجموع عددهای واقع در سمت چپ جدول، که زیر خط شکسته قرار

گرفته‌اند، برابر است با

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+n^۲$$

روشن است که مجموع عددهای زیر خط شکسته، در سمت راست جدول هم، همین مقدار می‌شود.

حالا، به محاسبهٔ مجموع عددهایی که در بالای خط شکسته قرار گرفته‌اند، می‌پردازیم. عددهای این قسمت را روی خط‌های شکستهٔ I-I، II-II، III-III و غیره، جمع می‌کنیم:

در ستون وسط: ۱

روی خط شکستهٔ I-I: $۱+۲+۱$

روی خط شکستهٔ II-II: $۱+۲+۳+۲+۱$

روی خط شکستهٔ III-III: $۱+۲+۳+۴+۳+۲+۱$

....

روی خط شکستهٔ $n-۱$: $\begin{array}{l} ۱+۲+۳+\dots+(n-۱)+n+ \\ (n-۱)+(n-۲)+\dots+۲+۱ \end{array}$

در مسالهٔ ۲، دیدیم که

$$[۱+۲+۳+\dots+(n-۱)+n]+[۱+۲+۳+\dots+(n-۱)]=n^۲$$

بنابراین، جدول فوق را می‌توان چنین نوشت:

در ستون وسط: $۱^۱$

روی خط شکستهٔ $\mathrm{I}-\mathrm{I}$: $۲^۲$

روی خط شکستهٔ $\mathrm{II}-\mathrm{II}$: $۳^۲$

....

روی خط شکستهٔ $n-۱$: $n^۲$

به این ترتیب، مجموع همهٔ عددهای بالای خط شکسته، چنین است:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\dots+n^۲$$

معلوم می‌شود که مجموع عددها در تمام جدول مستطیلی ما، برابر است با

$$۳(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲)$$

از طرف دیگر، مجموع همین عددها را، قبلاً هم به دست آوردیم:

$$\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲}$$

یعنی، باید داشته باشیم:

$$۳(۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲) = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۲}$$

$$\boxed{۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + n^۲ = \frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{۶}}$$

دستوری را به‌دست آوردیم که در ریاضیات، مورد استفادهٔ بسیار دارد و بنابر آن، می‌توان مجموع مجذورهای n عدد طبیعی نخستین را به‌دست آورد.

مثال.

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + ۱۰۰^۲ = \frac{۱۰۰ \times ۱۰۱ \times ۲۰۱}{۶} = ۳۳۸۳۵۰,$$

$$۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲ + \ldots + ۱۰^۲ = ۳۸۵$$

درستی تساوی آخر را، با محاسبهٔ مستقیم، آزمایش کنید.

۴. محاسبهٔ مجموع مکعب‌های n عدد طبیعی نخستین

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + n^۳$$

جدول ضرب $n \times n$ را به صورت یک جدول عددی مربع شکل می‌نویسیم. این‌گونه جدول‌های ضرب را، معمولاً *جدول‌های فیثاغورثی*

گویند (به نام فیثاغورث، ریاضی‌دان بزرگ سدهٔ ششم پیش از میلاد یونان باستان)، اگرچه مدت‌هاست روشن شده است که این جدول، هیچ‌گونه بستگی به فیثاغورث ندارد.

به سادگی دیده می‌شود که مجموع عددها، در هرکدام از شکل‌های زاویه این جدول، مکعب کامل است:

۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	.. ..	$(n-۱)$	n
۲	۴	۶	۸	۱۰	۱۲	۱۴	. . . . .	$۲(n-۱)$	$۲n$
۳	۶	۹	۱۲	۱۵	۱۸	۲۱	. . . . .	$۳(n-۱)$	$۳n$
۴	۸	۱۲	۱۶	۲۰	۲۴	۲۸	. . . . .	$۴(n-۱)$	$۴n$
۵	۱۰	۱۵	۲۰	۲۵	۳۰	۳۵	. . . .	$۵(n-۱)$	$۵n$
۶	۱۲	۱۸	۲۴	۳۰	۳۶	۴۲	. . . .	$۶(n-۱)$	$۶n$
۷	۱۴	۲۱	۲۸	۳۵	۴۲	۴۹	. . . .	$۷(n-۱)$	$۷n$
.	.	.	.	.	.	.	. . . .	. .	. .
$n-۱$	$۲(n-۱)$	$۳(n-۱)$	$۴(n-۱)$	$۵(n-۱)$	$۶(n-۱)$	$۷(n-۱)$	. . . .	$(n-۱)^۲$	$n(n-۱)$
n	$۲n$	$۳n$	$۴n$	$۵n$	$۶n$	$۷n$	. . . .	$n(n-۱)$	$n \cdot n$

$$۱ = ۱^۳$$

$$۲ + ۴ + ۲ = ۸ = ۲^۳$$

$$۳ + ۶ + ۹ + ۶ + ۳ = ۲۷ = ۳^۳$$

. . . .

$$n + ۲n + ۳n + \ldots + (n - ۱)n + n \cdot n + (n - ۱)n +$$

$$+ (n - ۲)n + \ldots + ۳n + ۲n + n =$$

$$= n[۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n - ۱) + n + (n - ۱) +$$

$$+ (n - ۲) + \ldots + ۳ + ۲ + ۱] =$$

$$n\{[۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n - ۱) + n] +$$

$$[۱ + ۲ + ۳ + \ldots + (n - ۱)]\} = n \cdot n^۲ = n^۳$$

(عبارت داخل ابرو، بنابر مسالهٔ ۲، عبارت است از مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا n به‌اضافهٔ مجموع عددهای طبیعی از ۱ تا $n-۱$ و بنابراین برابر است با $n^۲$).

به این ترتیب، مجموع عددهای جدول، به کمک عددهایی که در نوارهای زاویه‌ای قرار دادند، برابر است با

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ \ldots + n^۳$$

از طرف دیگر، اگر مجموع عددهای جدول را، سطر به سطر، محاسبه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(۱+۲+۳+\ldots+n) + ۲(۱+۲+۳+\ldots+n) + ۳(۱+۲+۳+\ldots+n) + \ldots + n(۱+۲+۳+\ldots+n) = (۱+۲+۳+\ldots+n)(۱+۲+۳+\ldots+n) = (۱+۲+۳+\ldots+n)^۲$$

ولی می‌دانیم که (بنابر مسالهٔ ۱):

$$۱+۲+۳+\ldots+n = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

و بنابراین

$$\boxed{۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + n^۳ = \left\{\frac{n(n+۱)}{۲}\right\}^۲}$$

مجموع مکعب‌های n عدد طبیعی نخستین، برابر است با مجذور مجموع همین عددها.

مثال.

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + ۱۰۰^۳ = \left[\frac{۱۰۰ \times ۱۰۱}{۲}\right]^۲$$

$$۱^۳ + ۲^۳ + ۳^۳ + \ldots + ۱۰^۳ = \left(\frac{۱۰ \times ۱۱}{۲}\right)^۲ = ۵۵^۲ = ۳۰۲۵$$

درستی تساوی آخر را، با محاسبهٔ مستقیم، تحقیق کنید.

بیشتر دستورهایی را که دربارهٔ عددهای طبیعی آوردیم، برای *فیثاغورث* و حتا بعضی از آن‌ها، برای ریاضی‌دان‌های بابلی و مصری، که دست‌کم ۴۰۰۰ سال پیش می‌زیسته‌اند، معلوم بوده است.

خیلی دیرتر از این‌ها، رابطه‌های مربوط به محاسبهٔ مجموع توان‌های چهارم، پنجم، ششم و غیره از n عدد نخستین دنبالهٔ عددهای طبیعی هم پیدا شد. مثلاً، برای مجموع توان‌های چهارم n عدد طبیعی نخستین داریم:

$$۱^۴ + ۲^۴ + ۳^۴ + \ldots + n^۴ = \frac{۱}{۳۰}(۶n^۵ + ۱۵n^۴ + ۱۰n^۳ - n)$$

این رابطه را، برای نخستین بار، *غیاث‌الدین* جمشید *کاشانی*، ریاضی‌دان ایرانی، در سدهٔ پانزدهم، به دست آورد. نام این دانشمند، از این جهت باید به یاد ما بماند که او در سال ۱۴۲۵ میلادی، کسرهای اعشاری را کشف کرد، یعنی ۱۵۰ سال پیش از کشف دوبارهٔ آن در اروپای غربی. هنوز هم، بیشتر، این کشف را به نام *سیمون ستون* (۱۵۴۸_۱۶۲۰) مهندس فلاندرزی ذکر می‌کنند.

۵. یک خاصیت از دنبالهٔ عددهای طبیعی

پنج وزنهٔ ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶ گرمی داریم، آیا می‌توان به کمک آن‌ها، وزن هر چیزی را که تا ۳۱ = ۱۶ + ۸ + ۴ + ۲ + ۱ گرم وزن داشته باشد، معین کرد، به شرطی که وزنه‌ها را تنها در یک کفهٔ ترازو بگذاریم؟

به سادگی، و با آزمایش، می‌توان روشن کرد که این عمل، ممکن است. امتحان کنید!

اگر، وزنهٔ ۳۲ گرمی را اضافه کنیم، روشن است که می‌توان بارهای تا ۶۳ گرم را وزن کرد، زیرا، می‌توان به ۳۲ گرم، هرکدام از عددهای از ۱ تا

۳۱ را، اضافه کرد (با پنج وزنهٔ قبلی می‌توانستیم چیزهای از ۱ تا ۳۱ گرمی را، وزن کنیم).

اگر وزنهٔ ۶۴ گرمی را هم در نظر بگیریم، می‌توانیم چیزهای از ۱ تا ۱۲۷ گرمی را، وزن کنیم.

وزنه‌های موجود، بر حسب گرم، این‌ها هستند:

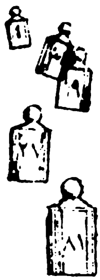
۱, ۲, ۴, ۸, ۱۶, ۳۲, ۶۴

یا

$$۱, ۲, ۲^{۲}, ۲^{۳}, ۲^{۴}, ۲^{۵}, ۲^{۶}$$

اگر دنبالهٔ توان‌های ۲ را ادامه دهیم، از این دنباله همراه با واحد، می‌توان به کمک عمل جمع، همهٔ عددهای طبیعی را به دست آورد. هر عدد *از این دنبالهٔ توان‌های ۲ ، برابر است با مجموع همهٔ توان‌های قبلی ۲ به‌اضافهٔ واحد.*

اگر، این وزنه‌ها را (برحسب گرم) داشته باشیم:



۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱

حداکثر باری را که می‌توان با این وزنه‌ها، وزن کرد، باری است که به‌اندازهٔ ۱۲۱ = ۸۱ + ۲۷ + ۹ + ۳ + ۱ گرم وزن داشته باشد.

آیا به کمک این وزنه‌ها، می‌توان همهٔ چیزهای از ۱ تا ۱۲۱ گرمی را وزن کرد؟ این عمل به شرطی قابل اجراست که از هر دو کفهٔ ترازو، برای گذاشتن وزنه، استفاده کنیم، که در این صورت، وزن بار برابر با تفاضل وزنه‌های دو کفه خواهد بود.

به سادگی می‌توان برای سه وزنهٔ نخست، یعنی وزنه‌های ۱، ۳ و ۹ گرمی، آزمایش کرد. به کمک این سه وزنه، می‌توان هر چیز از ۱ تا ۱۳ (۹ + ۳ + ۱ = ۱۳) گرمی را وزن کرد.

وزنه‌ای را که در کفهٔ بار قرار گرفته است، با علامت منفی نشان داده‌ایم:

بار ۱ گرمی:	با وزنهٔ اول
بار ۲ گرمی:	۳ گرم، ۱– گرم
بار ۳ گرمی:	برای این بار، وزنهٔ دوم را داریم
بار ۴ گرمی:	۱ گرم + ۳ گرم
بار ۵ گرمی:	۹ گرم؛ ۱– گرم و ۳– گرم
بار ۶ گرمی:	۹ گرم؛ ۳– گرم
بار ۷ گرمی:	۹ گرم + ۱ گرم؛ ۳– گرم
بار ۸ گرمی:	۹ گرم؛ ۱– گرم
بار ۹ گرمی:	وزنهٔ سوم
بار ۱۰ گرمی:	۹ گرم + ۱ گرم
بار ۱۱ گرمی:	۹ گرم + ۳ گرم؛ ۱– گرم
بار ۱۲ گرمی:	۹ گرم + ۳ گرم
بار ۱۳ گرمی:	۹ گرم + ۳ گرم + ۱ گرم

حالا، اگر وزنهٔ ۲۷ گرمی را هم در نظر بگیریم، می‌توان با اضافه کردن ۲۷ به هرکدام از حالت‌های ۱ تا ۱۳ گرم، همهٔ بارهای از ۱ تا ۴۰ گرمی را وزن کرد.

به همین ترتیب، اگر وزنهٔ ۸۱ گرمی را اضافه کنیم، می‌توانیم تا ۱۲۱ گرم را وزن کنیم.

به این ترتیب، از عددهای

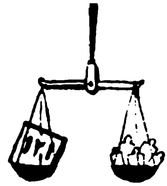
$$۱, ۳, ۹, ۲۷, ۸۱$$

یا

$$۱, ۳, ۳^{۲}, ۳^{۳}, ۳^{۴}$$

می‌توان با ادامهٔ توان‌های سه، به کمک جمع و تفریق، همهٔ عددهای دنبالهٔ طبیعی عددها را به دست آورد.

امکان تشکیل همهٔ عددهای دنبالهٔ طبیعی از توان‌های ۲ یا توان‌های ۳ و واحد، به کمک جمع یا جمع و تفریق، نشان دهندهٔ دو خاصیت مهم دنبالهٔ طبیعی عددهاست. لئونارد اولر (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳)، از همین خاصیت‌ها، برای پیدا کردن ساده‌ترین و راحت‌ترین دستگاه وزنه‌ها، استفاده کرد.



راحت‌ترین دستگاه وزنه‌ها، عبارتند از وزنه‌های ۱، ۳، ۹، ۲۷، ۸۱، ... گرمی، که البته برای به کار بردن آن‌ها، باید از هر دو کفهٔ ترازو، برای گذاشتن وزنه‌ها، استفاده کرد.

از روی همین مثال دیده می‌شود که ویژگی‌های عددها، که در برخورد اول، انتزاعی و دور از عمل به نظر می‌رسد، می‌تواند برای حل مساله‌های مربوط به زندگی روزانه، مورد استفاده قرار گیرد. از این نمونه‌ها، زیاد می‌توان پیدا کرد. اگر نظریه‌ها و یا قاعده‌هایی وجود دارد که هنوز نتوانسته‌اند کاربرد عملی پیدا کنند، به هیچ‌وجه جای نگرانی نیست، چون سرانجام، زمان کاربرد آن‌ها، فرا خواهد رسید. *الکسی نیکلایه‌ویچ کریلوف* (۱۸۶۳ـ۱۹۴۵)، مهندس عالی‌قدر، ریاضی‌دان، عضو آکادمی و قهرمان کار سوسیالیستی، در این‌باره، چه خوب گفته است:

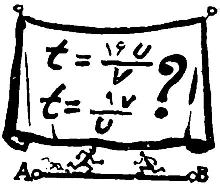
زمانی می‌گفتند که وقتی در را به‌جای خودش نصب کرده باشند «صفت» است، ولی اگر همان در جایی در انبار باشد، «اسم وجودی» است.

اولر

نظریه‌ها و قاعده‌های ریاضی، با کشف خود «هستی» پیدا می‌کنند، آن‌ها تنها وجود دارند و اغلب بدون کاربردند. دیر یا زود، و گاهی بعد از صدها و هزارها سال، این موجودهای ریاضی به «صفت» تبدیل می‌شوند و کاربرد خود را در زندگی و عمل، در سایر دانش‌ها، در صنعت و در هنر، پیدا می‌کنند ...

درس ششم

دربارهٔ معادله‌ها و حل مساله‌ها به کمک آن‌ها



ما در داستان‌های خود، چند بار به معادله، اشاره کرده‌ایم. ما می‌دانیم که معادله و یا دستگاه معادله‌ها را می‌توان با روش‌های کلی، و بدون برخورد به دشواری، حل کرد. همچنین، می‌دانیم که برای تشکیل معادله با توجه به فرض‌های مساله، هیچ قانون‌کلی وجود ندارد به‌جز این‌که به ما می‌گویند: باید فکر کرد.

در این داستان، به پیش‌آمدی که در یک مدرسه، دربارهٔ حل دستگاه معادله‌ها، پیش آمده است، می‌پردازیم و چند مساله را هم به کمک معادله، حل می‌کنیم.

پیش‌آمدی در مدرسه

معلم کلاس هفتم، برای بازرسی کار دانش‌آموزان، به هرکدام از آن‌ها، دستگاه

معادله‌های جداگانه‌ای داد، به این ترتیب:

$$\begin{array}{ll} ۱)\ ۲x + ۳y = ۴ & ۲)\ ۳x + ۴y = ۵ \\ ۵x + ۶y = ۷ & ۶x + ۷y = ۸ \\ ۳)\ ۳x + ۵y = ۷ & ۴)\ ۴x + ۷y = ۱۰ \\ ۹x + ۱۱y = ۱۳ & ۱۳x + ۱۶y = ۱۹ \\ ۵)\ ۴x + ۹y = ۱۴ & \\ ۱۹x + ۲۴y = ۲۹ & \text{و غیره} \end{array}$$

معلم پیش‌دستی کرد: «هرچه به شما سفارش کنند، باز هم دوست دارید به دفترچهٔ همسایهٔ خود نگاه کنید. من به هر کدام از شما دستگاهی داده‌ام و شما هرچقدر که می‌خواهید به دفترچهٔ دوست خود نگاه کنید».

هر دانش‌آموزی دستگاه خود را حل کرد، بدون این‌که وقت خود را با دیدن روش حل دیگران تلف کند؛ یکباره چند دست بلند شد.

ـ چرا اینطور شده است؟

ـ چی شده؟

ـ همهٔ جواب‌ها، یکی درآمده است.

در واقع هم، اگرچه، به دانش‌آموزان، دستگاه‌های مختلف داده شده بود، همهٔ آن‌ها به یک جواب رسیده بودند:

$$x = -۱$$

$$y = ۲$$

چطور چنین چیزی ممکن است؟

حل. همهٔ معادله‌های این دستگاه‌ها، با یک روش درست شده است؛ ضریب‌های دو معادلهٔ هر دستگاه (با به حساب آوردن عدد سمت راست تساوی) به این ترتیب در نظر گرفته شده است: هر ضریب از ضریب قبلی با اضافه کردن یک عدد ثابت به دست آمده است (یعنی ضریب‌های دو معادله،

تشکیل تصاعد عددی می‌دهند). در معادله‌های دو دستگاه اول، به هر ضریب یک واحد اضافه شده است تا ضریب بعدی به دست آید، در دستگاه سوم، برای پیدا کردن هر ضریب، ۲ واحد به ضریب قبلی اضافه شده است؛ در دستگاه چهارم، ۳ واحد، در دستگاه پنجم، ۵ واحد و غیره.

ثابت می‌کنیم، همهٔ دستگاه‌هایی که به این ترتیب تشکیل شوند (نخستین ضریب معادله و عدد ثابتی را که اضافه می‌کنیم، می‌توان به دلخواه گرفت)، همیشه دارای این جواب هستند.

$$x = -۱,\ y = ۲$$

برای اثبات، دستگاه را *با ضریب‌های حرفی*، در نظر می‌گیریم:

$$ax + (a+n)y = a + ۲n$$
$$(a+۳n)x + (a+۴n)y = a + ۵n$$

(در دو معادله، مقدار ثابتی را که به هر ضریب اضافه کرده‌ایم، تا ضریب بعدی به‌دست آید، با n نشان داده‌ایم).

معادلهٔ اول را، از معادلهٔ دوم کم می‌کنیم، به این معادله می‌رسیم:

$$۳nx + ۳ny = ۳n$$

یا

$$x + y = ۱$$

از این معادله، داریم: $x = ۱ - y$. این مقدار x را، در معادلهٔ اول دستگاه، قرار می‌دهیم، به‌دست می‌آید

$$y = ۲$$

و بنابراین

$$x = ۱ - ۲ = -۱$$

به این ترتیب، همهٔ دستگاه‌های دو معادلهٔ دومجهولی، که ضریب‌های آن‌ها، بنابر قاعده‌ای که گفتیم، تشکیل شود، به یک جواب می‌رسند:

$$x = -۱, \; y = ۲$$

دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی کلی‌تری هم، با همین جواب وجود دارد. به این دستگاه توجه کنیم:

$$ax + (a + k)y = a + ۲k$$
$$bx + (b + m)y = b + ۲m$$

و در آن فرض می‌کنیم: $a \neq b$ و $k \neq m$.
اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم کنیم، به دست می‌آید:

$$(a - b)x + (a - b)y + (k - m)y = a - b + ۲(k - m)$$

این معادله را می‌توان به صورت دستگاه دو معادلهٔ زیر نوشت:

$$(a - b)x + (a - b)y = a - b$$
$$(k - m)y = ۲(k - m)$$

و یا

$$x + y = ۱$$
$$y = ۲$$

که از آن‌جا، به دست می‌آید:

$$x = -۱,\ y = ۲$$

و اگر آزمایش کنیم، می‌بینیم که این جواب، در هر دو معادلهٔ دستگاه اصلی صدق می‌کند.

خاصیت داشتن یک جواب، برای دستگاه‌های مختلف را، نمی‌توان دربارهٔ دستگاه‌هایی که بیش از دو مجهول دارند، پیدا کرد، اگرچه ضریب‌ها را، طبق همان شرط دستگاه‌های دومجهولی تنظیم کنیم. مثلاً، این دستگاه را در نظر می‌گیریم:

$$ax + (a + n)y + (a + ۲n)z = a + ۳n$$
$$(a + ۴n)x + (a + ۵n)y + (a + ۶n)z = a + ۷n$$
$$(a + ۸n)x + (a + ۹n)y + (a + ۱۰n)z = a + ۱۱n$$

اگر معادلهٔ اول را، از معادلهٔ دوم کم کنیم، به دست می‌آید:

$$۴nx + ۴ny + ۴nz = ۴n$$

یا

$$x + y + z = ۱$$

به همین ترتیب، اگر معادلهٔ دوم را از معادلهٔ سوم کم کنیم، باز هم بعد از ساده کردن به دست می‌آید:

$$x + y + z = ۱$$

دو طرف این معادله را در a ضرب می‌کنیم:

$$ax + ay + az = a$$

حالا، این معادله را از معادلهٔ اول دستگاه مفروض، کم می‌کنیم:

$$ny + ۲nz = ۳n$$

یا

$$y + ۲z = ۳$$

بنابراین، دستگاه سه‌معادلهٔ سه مجهولی ما، با دستگاه دو معادلهٔ سه‌مجهولی زیر، هم‌ارز است:

$$x + y + z = ۱$$
$$y + ۲z = ۳$$

و روشن است که این دستگاه، دارای بی‌نهایت جواب است.

حل مساله‌ها، به کمک معادله

چند مساله را، به کمک معادله حل می‌کنیم و از مسالهٔ *ل. ن. تولستوی* که پیش از این به کمک شکل حل کردیم، آغاز می‌کنیم.

مسالهٔ ل. ن. تولستوی

«دروگران یک مزرعهٔ تعاونی، می‌خواستند یک مزرعه را درو کنند. یکی از این دو مزرعه، دو برابر دیگری بود. همهٔ دروگران، نصف روز را در مزرعهٔ بزرگتر کار کردند. در نیمهٔ دوم روز، گروه دروگران به دو قسمت برابر، بخش شدند؛ قسمت اول، در مزرعهٔ بزرگتر باقی ماند و کار آن را تا غروب تمام کرد. قسمت دوم دروگران، در مزرعهٔ کوچکتر مشغول شد، ولی تا پایان روز نتوانست آن را تمام کند. آن‌چه را که از مزرعهٔ دوم باقی مانده بود، یکی از دروگران، در طول یک روز کار تمام کرد. این شرکت تعاونی، چند دروگر، داشته است؟»

حل. تعداد دروگران را، x می‌گیریم.

برای درو کردن هر دو مزرعه، تمام دروگران در یک روز و یک دروگر در روز دوم، کار کرده‌اند. بنابراین، برای این‌که، هر دو مزرعه در یک روز درو شود، به $x + ۱$ دروگر احتاج است. چون مزرعهٔ کوچکتر $\frac{۱}{۳}$ تمام دو مزرعه است، برای درو کردن آن در جریان یک روز، $\frac{x+۱}{۳}$ دروگر لازم است. از طرف دیگر، می‌دانیم برای درو کردن مزرعهٔ دوم، نصف دروگران در نصف روز یا $\frac{۱}{۴}$ دروگران در تمام روز و سپس یک دروگر در یک روز لازم است، یعنی برای درو کردن مزرعهٔ کوچکتر به $\frac{x}{۴} + ۱$ دروگر برای یک روز، احتاج داریم. و در نتیجه به معادله زیر می‌رسیم.

$$\frac{x+۱}{۳} = \frac{x}{۴} + ۱$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x = ۸$$

روش دیگری برای تشکیل معادله

دیدیم که برای درو کردن هر دو مزرعه، روی هم $x + ۱$ دروگر برای یک روز لازم است. می‌توانیم تعداد دروگرانی که برای درو کردن مزرعهٔ بزرگ در یک روز لازم است، به دو طریق پیدا کنیم و سپس، با مساوی قرار دادن آن‌ها، x را به‌دست آوریم.

چون، مزرعهٔ بزرگ $\frac{۲}{۳}$ مجموع دو مزرعه است، می‌توان آن را به‌وسیلهٔ

$$\frac{۲(x+۱)}{۳}$$

دروگر، در یک روز درو کرد.

از طرف دیگر، می‌دانیم که مزرعهٔ بزرگ، ابتدا به وسیلهٔ تمام دروگران در نصف روز (یا $\frac{x}{۲}$ دروگران در یک روز) و، سپس، به‌وسیلهٔ نصف دروگران در نصف روز (یعنی $\frac{x}{۴}$ دروگر در یک روز) درو شده است. بنابراین مزرعهٔ بزرگتر می‌تواند به وسیلهٔ $\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴}$ دروگر، درو شود. به این معادله می‌رسیم:

$$\frac{۲}{۳}(x + ۱) = \frac{x}{۲} + \frac{x}{۴}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$x = ۸$$

روش سوم تشکیل معادله

برای این‌که مزرعه کوچکتر درو شود، به $۱ + \frac{x}{۴}$ دروگر در یک روز نیاز داریم؛ برای درو کردن مزرعه بزرگتر هم، $\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴}$ دروگر در یک روز، لازم است. مزرعهٔ بزرگتر، دو برابر مزرعهٔ کوچک‌تر است و بنابراین، باید تناسب زیر را داشته باشیم:

$$\left(\frac{x}{۴} + ۱\right) : \left(\frac{x}{۲} + \frac{x}{۴}\right) = ۱ : ۲;$$

$$۲\left(\frac{x}{۴} + ۱\right) = \frac{x}{۲} + \frac{x}{۴};$$

$$\frac{x}{۲} + ۲ = \frac{x}{۲} + \frac{x}{۴},$$

$$\frac{x}{۴} = ۲,$$

$$x = ۸$$

حل مساله، به کمک وارد کردن یک مجهول خارجی

اغلب پیش می‌آید که برای ساده‌تر کردن حل یک مساله، باید مجهول تازه‌ای، که مقدار آن مورد نیاز ما نیست، وارد در تشکیل معادله کرد.

مثل قبل، تعداد دروگران را x می‌گیریم؛ درضمن قطعه‌ای از زمین را که یک کارگر در یک روز درو می‌کند، با y نشان می‌دهیم.

روی مزرعهٔ بزرگتر، x دروگر در $\frac{۱}{۲}$ روز و $\frac{x}{۲}$ دروگر در $\frac{۱}{۲}$ روز، کار کرده‌اند؛ بنابراین، مقدار مزرعهٔ بزرگتر، چنین است:

$$y\left(\frac{x}{۲}+\frac{x}{۴}\right)=\frac{۳xy}{۴}$$

روی مزرعهٔ کوچکتر، $\frac{x}{۲}$ دروگر در $\frac{۱}{۲}$ روز به‌اضافهٔ یک دروگر در یک روز کامل، کار کرده‌اند؛ بنابراین، مقدار مزرعهٔ کوچکتر چنین است:

$$\frac{xy}{۴}+y=\frac{xy+۴y}{۴}$$

و چون مزرعهٔ بزرگتر، دو برابر مزرعهٔ کوچکتر است، باید داشته باشیم:

$$\frac{۳xy}{۴}:\ \frac{xy+۴y}{۴}=۲,$$

$$\frac{۳x}{x+۴}=۴,$$

$$x=۸$$

مسالهٔ نیوتن

حالا «مسالهٔ نیوتن» را با به کار بردن مجهول کمکی، حل می‌کنیم.

«سه چمن از علف پوشیده است. انبوهیِ علف‌ها، در همه‌جا، یکی

نیوتون

است. مساحت این سه چمن به ترتیب $۳\frac{۱}{۳}$، ۱۰ و ۲۴ آکر است (هر آکر برابر ۰/۴۰۵ هکتار است). علف‌های چمن اول را ۱۲ گاو در ۴ هفته و علف‌های چمن دوم را، ۲۱ گاو در ۹ هفته، می‌توانند بخورند. چند گاو می‌توانند در جریان ۱۸ هفته، علف‌های چمن سوم را بخورند».

حل. مجهول کمکی y را، سهم علفی می‌گیریم (نسبت به مقدار نخستین) که در جریان یک هفته در یک آکر زمین، رشد می‌کند. در چمن نخست، در یک هفته، رشد علف‌ها $۳\frac{۱}{۳}y$ و در چهار هفته $۴ \times ۳\frac{۱}{۳}y$، یعنی $\frac{۴۰}{۳}y$ آن مقدار علفی که در ابتدا بوده است، می‌شود. چون y، رشد علف‌ها در یک آکر است، بنابراین می‌توان مقدار کل علف‌هایی را که در چمن نخست، مورد استفاده قرار گرفته است، به اندازهٔ علف‌های روی

$$\left(۳\frac{۱}{۳} + \frac{۴۰}{۳}y\right) \text{ آکر}$$

دانست. یعنی، ۱۲ گاو در ۴ هفته، می‌توانند علف‌های چمنی به مساحت $\left(۳\frac{۱}{۳} + \frac{۴۰}{۳}y\right)$ آکر را بخورند. بنابراین، هر گاو در هر هفته، $\frac{۱}{۴۸}$ این مقدار یعنی علف‌های

$$\left(۳\frac{۱}{۳} + \frac{۴۰}{۳}y\right) : ۴۸ = \frac{۱۰ + ۴۰y}{۱۴۴} \text{ (آکر)}$$

را می‌خورند.

به همین ترتیب، می‌توانیم برای چمن دوم هم، محاسبه کنیم:

رشد علف‌ها در یک آکر و در جریان یک هفته، برابر است با y.

در ۹ هفته رشد علف‌ها در یک آکر، برابر است با $۹y$.

در ۹ هفته و در ۱۰ آکر زمین، رشد علف‌ها برابر است با $۹۰y$.

بنابراین مجموع علف‌ها در چمن دوم را ـ علف‌های نخستین به‌اضافهٔ رشد آن‌ها ـ می‌توان مقدار علفی دانست که در $(۱۰ + ۹۰y)$ آکر زمین وجود دارد.

این علف‌ها را، ۲۱ گاو در جریان ۹ هفته می‌خورند، پس یک گاو در یک هفته به‌اندازهٔ

$$\frac{۱۰ + ۹۰y}{۹ \times ۲۱} = \frac{۱۰ + ۹۰y}{۱۸۹} \text{ (آکر)}$$

علف می‌خورند. چون ظرفیت خورندگی گاوها را یکنواخت گرفته‌ایم، باید دو مقداری را که برای خوراک یک گاو در یک هفته به‌دست آورده‌ایم، برابر باشند با:

$$\frac{۱۰ + ۴۰y}{۱۴۴} = \frac{۱۰ + ۹۰y}{۱۸۹}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید: $y = \frac{۱}{۱۲}$.

حالا، با در دست داشتن مقدار y، می‌توانیم مساحت چمنی را که برای خوراک یک گاو در یک هفته لازم است، پیدا کنیم. برای این منظور باید، مقدار $\frac{۱۰ + ۴۰y}{۱۴۴}$ را به‌ازای $y = \frac{۱}{۱۲}$، محاسبه کنیم:

$$\frac{۱۰ + ۴۰ \times \frac{۱}{۱۲}}{۱۴۴} = \frac{۵}{۵۴} \text{ (آکر)}$$

چمن سوم، ۲۴ آکر مساحت دارد و x گاو در جریان ۱۸ هفته، علف‌های آن را می‌خورند. از یک طرف، به اندازهٔ $x \times ۱۸ \times \frac{۵}{۵۴}$، یعنی $\frac{۵}{۳}x$ آکر علف مورد نیاز است. از طرف دیگر، میزان رشد علف‌ها در این چمن در جریان ۱۸ هفته برابر $\frac{۱}{۱۲} \times ۱۸ \times ۲۴$، یعنی ۳۶ آکر، و بنابراین کل مساحت

علف‌ها به‌اندازهٔ ۳۶ + ۲۴، یعنی ۶۰ آکر می‌شود:

$$\frac{۵}{۳}x = ۶۰,\ x = ۳۶$$

در چمن سوم، ۳۶ گاو می‌توانند در جریان ۱۸ هفته غذا داشته باشند.

یادداشت. این مساله، ریشهٔ خیلی قدیمی دارد. *ارشمیدس* (۲۸۷_۲۱۲ پیش از میلاد) بزرگترین ریاضی‌دان همهٔ دوران‌ها، مساله‌ای به نام «مساله‌ای دربارهٔ گاوهای آفتاب» مطرح کرده بود که شامل ۸ مجهول بود و هرکدام از این مجهول‌ها بر حسب یک مجهول بیان شده بود. برای پیدا کردن مقادیر مجهول آخری، باید ریشه‌های درست و مثبت معادلهٔ زیر را به‌دست آورد[1]:

$$x^{۲} - ۴۷۲۹۴۹۴y^{۲} = ۱$$

لئونارد اولر، معادلهٔ به صورت $x^{۲} - ky^{۲} = ۱$ را که در آن k عددی درست و مثبت و غیر مجذور کامل است، مورد بررسی قرار داد و نام خاصی هم برای آن انتخاب کرد.

ریاضی‌دانان اروپایی سده‌های هفدهم و هیجدهم ثابت کردند، اگر ضریب $y^{۲}$ در معادلهٔ $x^{۲} - ky^{۲} = ۱$، مجذور کامل نباشد، همیشه، بی‌نهایت عدد درست مثبت برای x و y پیدا می‌شود که در این معادله صدق کند (یعنی این معادله، بی‌نهایت جواب درست مثبت دارد). قانونی وجود دارد که اگر کوچکترین جواب این معادله را در دست داشته باشیم، می‌توان به کمک

۱ـ عدد ۴۷۲۹۴۹۴، برابر است با حاصل‌ضرب

$$۲ \times ۳ \times ۷ \times ۱۱ \times ۲۹ \times ۳۵۳$$

آن، همهٔ جواب‌های دیگر را به‌دست آورد. بنابراین، مهم این است که بتوانیم جواب کوچکتر معادله را، پیدا کنیم. روش حل این‌گونه معادله‌ها، در رشته‌ای از ریاضیات که نظریهٔ عددها یا حساب عالی، نام دارد، مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کوچک‌ترین جواب معادلهٔ مربوط به گاوهای آفتاب، چنین است:

$$y = ۵۰۵۴۹۴۸۵۲۳۴۰۳۳۰۷۴۴۷۷۸۱۹۷۳۵۵۴۰۴۰۸۹۸۶۳۴۰,$$
$$x = ۱۰۹۹۳۱۹۸۶۷۳۲۸۲۹۷۳۴۹۷۹۸۶۶۲۳۲۸۲۱۴۳۳۵۴۳۹۰۱۰۸۸۰۴۹$$

وقتی اروپایی‌ها، در ابتدای سدهٔ نوزدهم، با دانش ریاضی هندی‌ها، آشنا شدند، معلوم شد دانشمندان ریاضی‌دان هندی، در سدهٔ هفتم، معادلهٔ $x^۲ - ky^۲ = ۱$ را (k عددی درست و مثبت و غیر مجذور کامل است)، با همان روشی که ما امروز حل می‌کنیم، حل کرده بودند. این معادله‌ها، در اخترشناسی، کاربرد زیاد دارد.

مسالهٔ نامه‌رسان‌ها

دو نامه‌رسان، یکی از A به طرف B، و دیگری از B به طرف A حرکت کردند. سرعت‌های آن‌ها با هم تفاوت دارد، ولی سرعت هر کدام یکنواخت است. بعد از آن‌که به هم رسیدند، یکی از آن‌ها باید باز هم ۱۶ ساعت و دیگری ۹ ساعت به راه خود ادامه دهد، تا به مقصد برسند.

هر کدام از نامه‌رسان‌ها، برای رسیدن از A به B، چقدر وقت لازم دارد؟

حل. سرعت نامه‌رسان‌ها را u و v و زمانی را که طول می‌کشد تا به هم برسند، t می‌گیریم.

نامه‌رسان نخست، برای عبور از تمام راه، به $t + ۱۶$ ساعت و نامه‌رسان دوم به $t + ۹$ ساعت، وقت نیاز دارند. فاصلهٔ بین نقطه‌های A و B را می‌توان به سه طریق نشان داد:

$$(t + ۱۶)u, \ (t + ۹)v, \ t(u + v)$$

به این تساوی‌ها می‌رسیم:

$$(t + ۱۶)u = t(u + v) \Rightarrow ۱۶u = tv \Rightarrow t = \frac{۱۶u}{v},$$
$$(t + ۹)v = t(u + v) \Longrightarrow ۹v = tu \Rightarrow t = \frac{۹v}{u}$$

و از آن‌جا

$$۱۶ \times \frac{u}{v} = ۹ \times \frac{v}{u} \Rightarrow \frac{u^۲}{v^۲} = \frac{۹}{۱۶} \Rightarrow \frac{u}{v} = \frac{۳}{۴}$$

مقداری را که به‌دست آورده‌ایم، در عبارت نخست t قرار می‌دهیم:

$$t = \frac{۱۶ \times ۳}{۴} = ۱۲$$

نامه‌رسان اول، برای عبور از تمام فاصله، ۱۶ + ۱۲، یعنی ۲۸ ساعت و نامه‌رسان دوم به ۹ + ۱۲، یعنی ۲۱ ساعت وقت نیاز دارد.

خودتان راهی برای آزمایش جواب پیدا کنید.

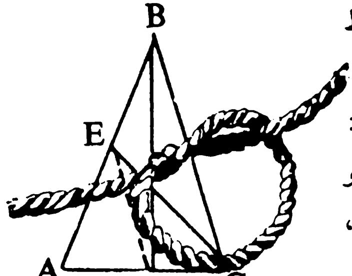
درس هفتم

چگونه مساله‌هایی که به هندسه بستگی ندارد،

به کمک مساله‌های ساختمانی هندسه، روشن می‌شوند؟

پیش‌آمدی در کلاس بزرگترها

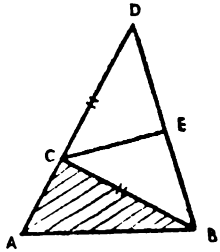
نویسندهٔ کتاب، مقدمات هندسه را به بزرگترها، یاد می‌داد. می‌خواستیم، روش حل مساله‌های مربوط به ساختمان‌های هندسی را روشن کنیم.



کتاب درسی، این‌طور توصیه می‌کرد: فرض می‌کنیم مساله، حل شده است و آن‌چه را که لازم داریم، ساخته شده است، آن‌وقت فکر می‌کنیم که چگونه می‌توان از شکل ساخته شده، به داده‌های مساله رسید، تا به این ترتیب، بتوانیم مسیر عکس را پیدا کنیم و از داده‌ها، به شکل مورد نظر برسیم.

مثال ساده. می‌خواهیم مثلثی را رسم کنیم که قاعده، زاویهٔ پهلوی قاعده و مجموع دو ضلع دیگر آن، در دست باشد.

فرض می‌کنیم، مساله حل شده است، یعنی مثلث ABC را ساخته‌ایم که قاعدهٔ آن $AB = a$، زاویهٔ پهلوی قاعدهٔ آن $CAB = \alpha$ و مجموع دو ضلع دیگر آن $AC + CB = l$ باشد. اگر AC را از طرف نقطهٔ C به اندازهٔ CB ادامه دهیم، به‌دست می‌آید: $AD = l$. مثلث DAB را با داده‌های مساله، می‌توان ساخت. این باقی می‌ماند که نقطهٔ C را روی AD طوری پیدا کنیم که داشته باشیم $DC = CB$ ⋅ D و B را به هم وصل می‌کنیم و فرض می‌کنیم، نقطهٔ C پیدا شده است. روشن است که مثلث BDC متساوی‌الساقین است. می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع وارد بر قاعده، قاعده را نصف می‌کند؛ بنابراین، اگر از نقطهٔ E، وسط BD، عمودی بر BD رسم کنیم، نقطهٔ برخورد این عمود با AD، همان نقطهٔ C است. مثلث مورد نظر، ساخته شد.



نه توضیح و نه آوردن مثال، نتوانست، اهمیت این روش حل مساله را، برای کلاس روشن کند. دانش‌آموزان می‌گفتند، این روش حل، در زندگی روزانه به این معناست که اگر من به ۱۰۰۰۰ ریال احتیاج داشته باشم، به من پیشنهاد کنند: فرض کنم کسی ۱۰۰۰۰ ریال به دست آورده است (فرض کنم که مساله حل شده است)، بعد فکر کنم که او این مبلغ را چگونه به‌دست آورده است. به اعتقاد دانش‌آموزان، این فرض که مساله حل شده است، به هیچ‌وجه، جست‌وجوی راه‌حل را ساده نمی‌کند و برای هر مساله باید راه‌حلی مخصوص به آن برای ساختن شکل مورد نظر، پیدا کرد. برای روشن کردن

این روش حل و برای مسلط کردن دانش‌آموزان در استفادهٔ از آن، حل این مساله را به آن‌ها پیشنهاد کردم.

مساله‌ای دربارهٔ گره زدن

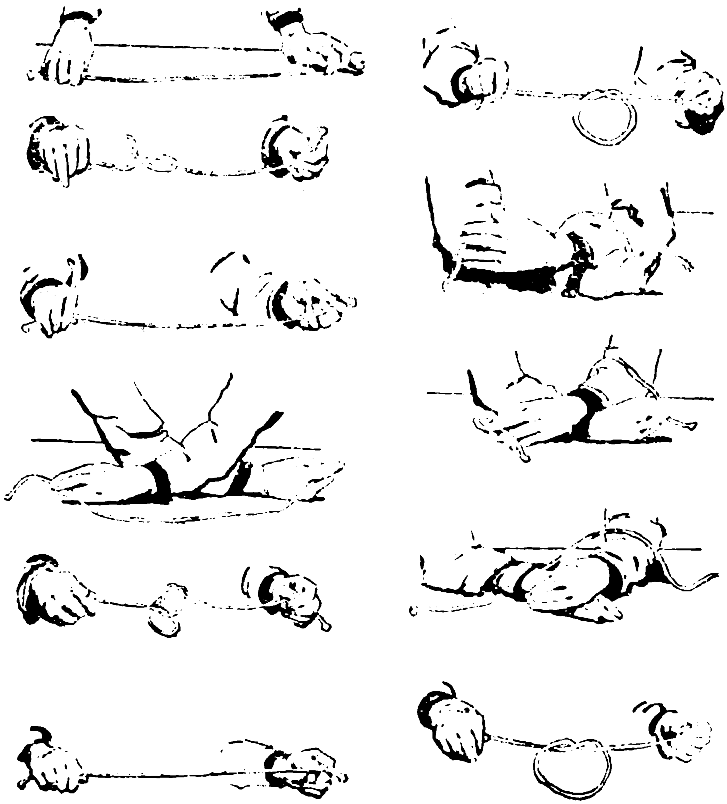
روی میز، تکه‌ای طناب باز شده، به صورت یک خط راست، قرار دارد. می‌خواهیم یک سر طناب را به یک دست و سر دیگر آن را به دست دیگر بگیریم و بدون این‌که دو سر آن را از دست رها کنیم، گرهی به آن بزنیم.

دانش‌آموزان علاقه‌مند بلافاصله شروع به کار کردند. با دست چپ انتهای چپ طناب و با دست راست، انتهای راست طناب را گرفتند، ولی به این ترتیب، گره به طناب نخورد. وضع را عوض کردند، با دست چپ، انتهای راست طناب و با دست راست، انتهای چپ طناب را گرفتند، باز هم موفق به حل مساله نشدند.

بعد از یک رشته تجربه، دانش‌آموزان اعلام کردند که این مساله قابل حل نیست.

آن‌وقت، من از کلاس خواستم که کوشش کنند، مساله را با روش هندسی حل کنند.

فرض می‌کنیم مساله حل شده است، یعنی گره بر طناب خورده است و دو سر آن در دو دست قرار دارد. کوشش می‌کنیم از جواب، به حالت فرض مساله برسیم، یعنی بدون این‌که دو سر طناب را رها کنیم، آن را به صورت باز شده روی میز قرار دهیم. وقتی که طناب را، بدون رها کردن دو انتهای آن، راست کنیم، معلوم می‌شود که دست چپ، زیر طناب و از روی دست راست، انتهای راست طناب را گرفته است و دست راست، روی طناب و از زیر دست چپ، انتهای چپ طناب را گرفته است.



حالا دیگر حل مساله ساده است: طناب روی میز قرار دارد، با دست راست، انتهای چپ طناب را می‌گیریم، با دست چپ، از زیر طناب ورودی دست راست، انتهای راست طناب را می‌گیریم و بدون این‌که طناب را رها کنیم، دست‌ها را باز می‌کنیم. روی طناب گرهی می‌افتد که بنابر شرط‌های مساله، به وجود آمده است.

این مساله، که در برخورد اول هیچ‌گونه بستگی با حل مساله‌های ساختمانی هندسی ندارد، به دانش‌آموزان کمک کرد تا معنای روشنی را که در کتاب درسی آمده بود، بفهمند و برای آن‌ها روشن شود که چگونه می‌توان از آن برای حل مساله، استفاده کرد.

این روش حل مساله‌های ساختمانی هندسه، که بنابر آن باید مساله را حل شده فرض کرد و از آن‌جا خود را به شرط‌های مساله رساند، در سدهٔ پنجم پیش از میلاد، یعنی نزدیک دوهزار و پانصد سال پیش، به‌وسیلهٔ *افلاطون*، فیلسوف یونان باستان، شرح داده شده است.

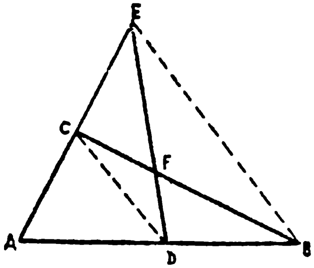
حل مسالهٔ معمایی گره زدن به طناب، خیلی خوب مفهوم روش حل مساله‌های ساختمانی هندسی را روشن می‌کند. حالا، با حل چند مساله، به این روش می‌پردازیم.

مسالهٔ ۱. مثلث ABC داده شده است. مثلث دیگری بسازید که هم‌ارز با این مثلث باشد، به شرطی که قاعدهٔ مثلث جدید برابر AD باشد و مقدار زاویهٔ A، تغییر نکند.

حل. مثلث ABC را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که مثلث ADE با آن هم‌ارز باشد.

نقطهٔ E را به نقطهٔ B و نقطهٔ C را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم.

حل مساله، به این‌جا منجر می‌شود که بتوانیم نقطهٔ E را پیدا کنیم. اگر بتوانیم توازی دو خط راست BE و CD را ثابت کنیم، نقطهٔ E به سادگی پیدا می‌شود، زیرا در این صورت، کافی است از نقطهٔ B، خطی موازی DC (که برای ما معلوم است)، رسم کنیم.



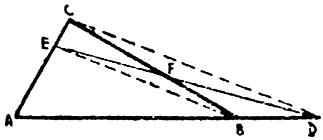
اگر دو مثلث ABC و ADE هم‌ارز باشند، دو مثلث DBF و CFE نیز، هم‌ارز می‌شوند، زیرا اگر دو مثلث اخیر را به چهارضلعی $ADFC$ اضافه کنیم، مثلث‌های ABC و ADE به‌دست می‌آید. بنابراین باید داشته باشیم:

$$\text{مساحت مثلث } DBF = \text{مساحت مثلث } CEF$$

اگر به هرکدام از این دو مثلث هم‌ارز، مثلث BEF را اضافه کنیم، به دو مثلث هم‌ارز DBE و CBE می‌رسیم. دو مثلث اخیر، در قاعدهٔ BE مشترک‌اند و چون مساحت‌های برابر دارند، باید ارتفاع‌های برابر داشته باشند. از طرف دیگر راس‌های این دو مثلث، بر خط DC قرار دارند، بنابراین باید DC موازی BE باشد.

حالا دیگر، راه‌حل مساله معلوم است: مثلث ABC را داریم؛ نقطهٔ D، انتهای قاعدهٔ جدید معلوم است؛ D را به C وصل می‌کنیم، ضلع AC را از طرف C ادامه می‌دهیم؛ از نقطهٔ B، خطی موازی DC رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد آن با امتداد AC، همان نقطهٔ E خواهد بود که مثلث مورد نظر ADE را به ما می‌دهد، مثلثی که با مثلث ABC هم‌ارز است.

مساله، همیشه ممکن است و در هر حال، یک جواب منحصر دارد.



در حالتی هم که قاعدهٔ AD از AB بزرگتر باشد، می‌توان درست با همان روش عمل کرد و مثلث جدید ADE را هم‌ارز با مثلث ABC به‌دست آورد.

مسالهٔ ۲. زاویهٔ ABC و نقطهٔ D واقع بر صفحهٔ زاویه، داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ D، خط راستی چنان بکشیم که در برخورد با زاویهٔ ABC، مثلثی با محیط معلوم $۲p$ به وجود آورد.

حل. فرض می‌کنیم مساله حل شده است و مثلث مورد نظر BEF به‌دست آمده است، که در آن امتداد ضلع EF از نقطهٔ D می‌گذرد و محیط مثلث هم برابر با $۲p$ است، یعنی

$$BE + EF + FB = ۲p$$

دایره‌ای مماس بر EA، EF و FC رسم می‌کنیم (این دایره را، دایرهٔ محاطی خارجی مثلث BEF گویند). این دایره، منحصر به فرد است و مرکز آن در نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های CEE و FEA قرار دارد. نقطه‌های تماس این دایره را با خط‌های نامبرده، K، L و M می‌نامیم. چون داریم: $FL = FM$ و $EM = EK$ (خاصیت‌های پاره‌خط‌های مماسی که از یک نقطه بر یک دایره رسم می‌شوند)، خواهیم داشت:

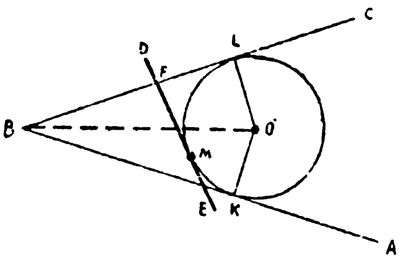
$$BE + EF + FB = BE + EM + MF + FB =$$
$$= BE + EK + FL + FB = BK + BL = ۲p$$

اما پاره‌خط‌های BL و BK برابرند، بنابراین: $BK = BL = p$. حل مساله، به این‌جا منجر می‌شود که دایره‌ای رسم کنیم که در نقطه‌های K و L

بر ضلع‌های زاویهٔ داده شده، مماس باشد و سپس از $(BK = BL = p)$
نقطهٔ D، خطی بر این دایره مماس رسم کنیم.

روش رسم

روی ضلع‌های زاویهٔ داده شده، پاره‌خط‌های BK و BL را برابر p جدا می‌کنیم و از نقطه‌های K و L، عمودهای KO و LO را به ترتیب بر AB و BC رسم و ادامه می‌دهیم تا در O به هم برسند. از نقطهٔ O به شعاع برابر OK یا OL دایره‌ای رسم می‌کنیم و از D مماسی بر قسمت کوچکتر این دایره می‌کشیم.



وقتی نقطهٔ D در خارج زاویهٔ داده شده، و در خارج زاویهٔ عمود بر آن، یا بر پاره‌خط‌های BL و BK یا بر کمان کوچکتر دایره ـ به‌جز نقطه‌های B و K و L، واقع باشد، مساله یک جواب دارد و وقتی که نقطهٔ D در داخل شکلی باشد که به پاره‌خط‌های BK و BL و کمان کوچکتر دایره محدود است مساله دو جواب دارد. در دیگر حالت‌ها، مساله بدون جواب است.

خودتان برای همهٔ این حالت‌ها، شکل را رسم کنید.

یادداشت. این مساله، به س. *لیوله* (S.Lhuller، ۱۷۵۰_۱۸۴۰) که در ابتدای سدهٔ نوزدهم در ورشو کار می‌کرد، منسوب است. نام *لیوله* روی

چند رابطهٔ مثلثاتی و هندسی، باقی ماند است. یکی از این رابطه‌ها، این است:

$$\frac{۱}{r} = \frac{۱}{r_۱} + \frac{۱}{r_۲} + \frac{۱}{r_۳}$$

که در آن، r عبارت است از شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و $r_۱$، $r_۲$ و $r_۳$ عبارتند از شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی یک مثلث.

مسالهٔ ۳. روشی که برای حل مساله‌های قبل نشان دادیم و بنابر آن فرض می‌کردیم که مساله حل شده است و با شروع از آن، راهی برای حل مساله پیدا می‌کردیم، کاربرد گسترده‌ای در مساله‌های ساختمانی هندسی دارد. ولی، آن‌طور که ممکن است دانش‌آموزان گمان کنند، تنها اختصاص به مساله‌های هندسی ندارد.

حل یک مساله به کمک معادله هم، در واقع همین روش است، زیرا در آن‌جا هم فرض می‌کنیم که مساله، بنابر شرط‌های داده شده، دارای جواب است؛ این جواب را x و y می‌نامیم و بستگی بین عدد مجهول و داده‌های مساله را پیدا می‌کنیم (معادله یا معادله‌ها را تشکیل می‌دهیم) و با حل معادله، x را محاسبه می‌کنیم، یعنی از داده‌های مساله، به مقدار مجهول می‌رسیم.

با مثال زیر، نشان می‌دهیم که از این روش، برای حل مساله‌های حساب هم می‌توان استفاده کرد.

ثابت کنید که مکعب هر عدد طبیعی، برابر است با تفاضل مربع‌های دو عدد درست (یعنی دنبالهٔ عددهای طبیعی، به‌اضافهٔ صفر):

$$۱^۳ = ۱ = ۱^۲ - ۰^۲$$

$$۲^۳ = ۸ = ۳^۲ - ۱^۲$$

$$۳^۳ = ۲۷ = ۶^۲ - ۳^۲$$

$$۴^۳ = ۶۴ = ۱۰^۲ - ۶^۲$$

اثبات ۱. برای هر عدد طبیعی n، داریم:

$$\left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2-\left(\frac{n^2-n}{2}\right)^2=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}-\frac{n^4-2n^3+n^2}{4}=n^3$$

یادداشت. اثبات، خیلی ساده به ما نشان می‌دهد که مکعب هر عدد طبیعی به صورت n، برابر است با تفاضل مربع‌های دو عدد طبیعی به صورت $\frac{n^2+n}{2}$ و $\frac{n^2-n}{2}$. مثلاً

$$11^3=1331=\left[\frac{11^2+11}{2}\right]^2-\left[\frac{11^2-11}{2}\right]^2=66^2-55^2=1331$$

ولی، برای اثبات، ابتدا باید عددهای $\frac{n^2+n}{2}$ و $\frac{n^2-n}{2}$ را حدس زد و بعد آزمایش کرد که آیا تفاضل مربع‌های آن‌ها برابر با n^3 می‌شود یا نه. آیا نمی‌توان روشی برای اثبات پیدا کرد که ضمن آن، خود عددهای $\frac{n^2+n}{2}$ و $\frac{n^2-n}{2}$ به‌دست آید؟

اثبات ۲. می‌توان به این ترتیب، استدلال کرد.

فرض می‌کنیم، مکعب عدد n، برابر با تفاضل مربع‌های دو عدد x و y باشد:

$$n^3=x^2-y^2$$

با تجزیهٔ عبارت سمت راست تساوی، به‌دست می‌آید:

$$n^3=(x-y)(x+y)$$

این تساوی را می‌توان این‌طور نوشت:

$$n\cdot n^2=(x-y)(x+y)$$

و بنابراین، وقتی برقرار است که داشته باشیم:

$$n = x - y$$
$$n^{۲} = x + y$$

که اگر n را معلوم و y و x را مجهول بگیریم، به دستگاه دو معادلهٔ دومجهولی زیر می‌رسیم:

$$x + y = n^{۲}$$
$$x - y = n$$

از جمع و تفریق کردن این دو تساوی، به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{n^{۲} + n}{۲},\ y = \frac{n^{۲} - n}{۲}$$
$$n^{۳} = \left(\frac{n^{۲} + n}{۲}\right)^{۲} - \left(\frac{n^{۲} - n}{۲}\right)^{۲}$$

$\frac{n^{۲} + n}{۲}$ و $\frac{n^{۲} - n}{۲}$، همیشه عددهای درستی هستند، زیرا اگر n عددی زوج باشد، $n^{۲}$ هم زوج است و صورت هر دو کسر، زوج می‌شود؛ و اگر n عددی فرد باشد مربع آن هم عددی فرد می‌شود و هم مجموع و هم تفاضل دو عدد فرد، عددی است زوج.

اثبات ۱ را *اثبات ترکیبی* و اثبات ۲ را *اثبات تحلیلی* گویند.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد، از دو مربع کامل $x^{۲}$ و $y^{۲}$، که تفاضل آن‌ها برابر است با $n^{۳}$، دست‌کم یکی (یا $x^{۲}$ یا $y^{۲}$) بر ۹ بخش‌پذیر است.

اثبات. پیدا کردیم که

$$x = \frac{n^{۲} + n}{۲} = \frac{n(n + ۱)}{۲}$$

$$y = \frac{n^۲ - n}{۲} = \frac{n(n - ۱)}{۲}$$

برای عدد n؛ سه حالت پیش می‌آید.

۱) n مضربی است از ۳: $n = ۳k$. در این صورت داریم:

$$x^۲ = \frac{n^۲(n + ۱)^۲}{۴} = \frac{۹k^۲(۳k + ۱)^۲}{۴}$$
$$y^۲ = \frac{n^۲(n - ۱)^۲}{۴} = \frac{۹k^۲(۳k - ۱)^۲}{۴}$$

$x^۲$، $y^۲$، هر دو بر ۹ بخش‌پذیرند.

۲) در تقسیم n بر ۳، باقی‌ماندهٔ ۱ به‌دست می‌آید: $n = ۳k + ۱$. در این صورت داریم:

$$y^۲ = \frac{(۳k + ۱)^۲(۳k + ۱ - ۱)^۲}{۴} = \frac{(۳k + ۱)^۲ ۹k^۲}{۴}$$

$y^۲$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

۳) در تقسیم n بر ۳، باقی‌ماندهٔ ۲ به‌دست می‌آید:

$$n = ۳k + ۲ = ۳(k + ۱) - ۱ = ۳l - ۱$$

که در آن هم k و هم l عددهایی طبیعی هستند. در این صورت داریم:

$$x^۲ = \frac{(۳l - ۱)^۲(۳l - ۱ + ۱)^۲}{۴} = \frac{(۳l - ۱)^۲ ۹l^۲}{۴}$$

$x^۲$ بر ۹ بخش‌پذیر است.

به این ترتیب، ثابت شد که یا $x^۲$ یا $y^۲$ یا هر دوی آن‌ها، بر ۹ بخش‌پذیرند.

درس هشتم

گاهی، دانش‌آموز کلاس پنجم بهتر از دانش‌آموز کلاس دهم می‌تواند مساله حل کند.

مسالهٔ پنج کلاه

پنج پسربچه، کلاه‌های خود را عوض کردند، طوری که هر کسی کلاه دیگری را به سر گذاشت.

به چند طریق می‌توان کلاه‌ها را عوض کرد؟

یادداشت. این مساله را می‌توان به کمک نظریهٔ آنالیز ترکیبی حل کرد. ولی به‌جای این‌که صبر کنیم و در کلاس‌های بالا به این نظریه برسیم، می‌توان با روش‌های مختلف و ساده‌ای، این مساله را به کمک حساب حل کرد. راه حل حسابی این مساله، هم بسیار ساده و هم خیلی زیبا است.

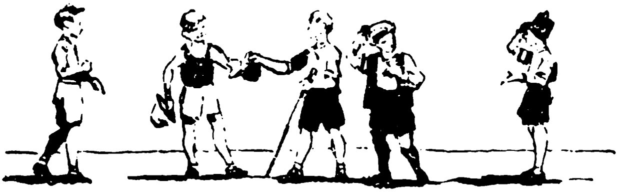
مساله را برای پنج کلاه حل کنید و سپس جواب آن را برای حالت کلی، و وقتی که n کلاه داشته باشیم، پیدا کنید.

حل حسابی. تعداد حالت‌هایی را که n پسربچه می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند، به نحوی که هر کسی کلاه دیگری را به سر داشته باشد، با x_n نشان می‌دهیم.

وقتی که ۴ پسربچه باشند، تعدادحالت‌ها $x_۴$ و وقتی که ۵ پسربچه باشند، تعداد حالت‌ها $x_۵$ می‌شود و غیره.

به سادگی و به طور مستقیم می‌توان $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$ و $x_۴$ را محاسبه کرد.

روشن است که $x_۲ = ۱$، زیرا دو پسربچه تنها به یک طریق می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند.



برای محاسبهٔ $x_۳$ و $x_۴$، پسربچه‌ها را با عددهای رومی I، II، III، ... و کلاه‌های آن‌ها را به‌ترتیب با عددهای ۱، ۲، ۳، ... نشان می‌دهیم.

فرض کنیم، سه پسربچه وجود داشته باشد: I، II و III. کلاه‌های آن‌ها به ترتیب عبارتند از ۱، ۲ و ۳. در این حالت، تنها به ۲ طریق می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند، به نحوی که هر کسی کلاه دیگری را به سر داشته باشد:

I	II	III
۲	۳	۱
۳	۱	۲

به این ترتیب: $x_۳ = ۲$.

حالا فرض کنید چهار پسربچهٔ I، II، III و IV با کلاه‌های ۱، ۲، ۳

و ۴ را داشته باشیم:

I	II	III	IV
۲	۳	۴	۱
۲	۴	۱	۳
۲	۱	۴	۳
۳	۱	۴	۲
۳	۴	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۴	۳	۲	۱
۴	۳	۱	۲

این‌ها تنها حالت‌های ممکن جابه‌جا کردن کلاه‌ها است، به نحوی که هرکس کلاه دیگری را به سر داشته باشد. به این ترتیب

$$x_۴ = ۹$$

تا این‌جا، می‌دانیم

$$\boxed{x_۲ = ۱,\ x_۳ = ۲,\ x_۴ = ۹}$$

محاسبهٔ مستقیم $x_۵$، دیگر به این سادگی نیست.

اگر از رابطه‌ای که $x_۵$ را به مقادیر $x_۴$، $x_۳$ و $x_۲$ مربوط می‌کند، آگاهی داشتیم، می‌توانستیم بدون محاسبهٔ مستقیم، تمام حالت‌های ممکن را برای پنج کلاه پیدا کنیم. به این ترتیب، مساله منجر، به این می‌شود که بتوانیم $x_۵$ را به مقادیر x با اندیس کوچکتر از ۵، مربوط کنیم و به طور کلی رابطه‌ای پیدا کنیم که بستگی بین x_n را با $x_{n-۱}$، $x_{n-۲}$ و غیره، نشان دهد.

این روش حل مساله، که بتوانیم مسالهٔ مربوط به n چیز را منجر به مساله‌ای با چیزهای کمتر کنیم، در ریاضیات کاربرد فراوان دارد.

این روش را روش برگشتی نام گذاشته‌اند. ما هم به جست‌وجوی یک *رابطهٔ برگشتی* می‌رویم که بتواند x_n را برحسب $x_{u-۱}$ و $x_{n-۲}$ و غیره، بیان کند.

ابتدا $x_۵$ را برحسب $x_۴$ و $x_۳$ پیدا می‌کنیم. استدلالی را که برای بیان $x_۵$ به کار می‌بریم، می‌توان در حالت کلی، و برای بیان x_n، به کار برد.

رابطهٔ برگشتی

فرض کنیم که بخواهیم چهار کلاه ۱، ۲، ۳ و ۴ را بین چهار پسربچهٔ I، II، III و IV به تمام انواع ممکن، تقسیم کنیم. حالت‌های مختلف را می‌توان به سادگی به دست آورد:

	I	II	III	IV
پسربچه‌ها:	I	II	III	IV
هرکسی کلاه خود را به سر دارد:	۱	۲	۳	۴
اولی کلاه خودش و بقیه، کلاه دیگران را به سر دارند:	۱	۳	۴	۲
	۱	۴	۲	۳
دومی کلاه خودش و بقیه، کلاه دیگران را به سر دارند:	۳	۲	۴	۱
	۴	۲	۱	۳
سومی کلاه خودش و بقیه، کلاه دیگران را به سر دارند:	۲	۴	۳	۱
	۴	۱	۳	۲
چهارمی کلاه خودش و بقیه، کلاه دیگران را به سر دارند:	۲	۳	۱	۴
	۳	۱	۲	۴

دو پسربچه کلاه خودشان و دوتای دیگر کلاه عوضی به سر دارند:

۱	۲	۴	۳
۱	۴	۳	۲
۱	۳	۲	۴
۴	۲	۳	۱
۳	۲	۱	۴
۲	۱	۳	۴

هر کسی کلاه دیگری را به سر دارد:

۲	۳	۴	۱
۲	۴	۱	۳
۲	۱	۴	۳
۳	۱	۴	۲
۳	۴	۲	۱
۳	۴	۱	۲
۴	۱	۲	۳
۴	۳	۲	۱
۴	۳	۱	۲

به این ترتیب، چهار کلاه را به بیست‌وچهار روش مختلف می‌توان بین چهار پسربچه تقسیم کرد. از بین بیست‌وچهار حالت، ۹ حالت، مربوط به موقعی است که هر کسی کلاه دیگری را به سر گذاشته است؛ ۸ حالت مربوط به موقعی است که تنها یکی از پسربچه‌ها کلاه خود را به سر دارد و سه پسربچهٔ دیگر، کلاه دیگری را به سر گذاشته‌اند؛ ۶ حالت مربوط به موقعی است که دو پسربچه کلاه خود و دوتای دیگر، کلاه عوضی به سر دارند و ۱ حالت مربوط به موقعی است که هرکسی صاحب کلاه خودش است. روشن است که نمی‌توان حالتی را پیدا کرد که تنها سه پسربچه صاحب کلاه خودشان باشند، زیرا در این صورت نفر چهارم هم، صاحب کلاه خودش می‌شود[۲].

[در هرکدام از ۲۴ حالت، چهار کلاه ۱، ۲، ۳ و ۴، از نظر ردیفی که قرار گرفته‌اند، با هم تفاوت دارند. غیر از ۲۴ حالتی که در این‌جا آورده‌ایم،

۲ــ آن‌چه، در چند سطر بعد داخل کروشه گذاشته است، برای حل مساله لازم نداریم و تنها برای کسانی که علاقه‌مند هستند، آورده‌ایم. شما اگر بخواهید، می‌توانید از آن بگذرید.

به هیچ ترتیب جدید دیگری، نمی‌توان عددهای ۱، ۲، ۳ و ۴، را نوشت (خودتان امتحان کنید). به سخن دیگر، تنها ۲۴ ترتیب ممکن، برای ۴ عدد ۱، ۲، ۳ و ۴، وجود دارد. به جای چهار عدد می‌توان چهار شیء و یا به زبان کلی‌تر، چهار عنصر انتخاب کرد. تعداد ترتیب‌های ممکن از n عنصر را، با علامت P_n نشان می‌دهند. در بررسی که کردیم، روشن شد که $P_۴ = ۲۴$. آزمایش نشان می‌دهد که $۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱ = ۲۴$ بنابراین داریم:

$$P_۴ = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴$$

در ریاضیات، برای حاصل‌ضرب همهٔ عددهای طبیعی از ۱ تا n، یعنی حاصل‌ضرب

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times (n - ۱) \times n$$

علامت سادهٔ $n!$ را گذشته‌اند که آن را *فاکتوریل* n می‌خوانند. با توجه به این قرارداد می‌توان نوشت:

$$n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots (n - ۱) \times n$$

$$P_۴ = ۴! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times ۴ = ۲۴$$

ثابت می‌کنند که تعداد ترتیب‌های n عنصر، برای هر مقدار n، برابر است با فاکتوریل n:

$$P_n = n! = ۱ \times ۲ \times ۳ \times \ldots \times (n - ۱) \times n$$

همان‌طور که گفتیم، برای حل مسالهٔ خود، یعنی پیدا کردن رابطه‌ای بین $x_۵$ با $x_۴$ و $x_۳$، یا به طور کلی بین x_n با $x_{n-۱}$ و $x_{n-۲}$، نه مفهوم ترتیب و نه مفهوم فاکتوریل لازم نیست و همان‌طور که خواهیم دید، می‌توانیم رابطهٔ مورد نظر را با استدلال ساده‌ای پیدا کنیم.]

به این ترتیب، پرسشی پیش می‌آید: اگر تعداد حالت‌هایی که چهار پسربچه (و به طور کلی n پسربچه) می‌توانند کلاه‌های خود را طوری بین خود تقسیم کنند که هر کسی، کلاه دیگری را به سر داشته باشد، به $x_۴$ نشان دهیم (و در حالت کلی به x_n)، آیا نمی‌توان عدد $x_۵$ (و به طور کلی x_n) را بر حسب $x_۴$ و $x_۳$ (و به طور کلی $x_{n-۱}$ و $x_{n-۲}$) بیان کرد؟

برای همهٔ حالت‌های ممکن تقسیم چهار کلاه بین چهار پسربچه، ۲۴ حالت داریم که در جدول صفحه‌های قبل دیدیم.

فرض کنید، به چهار پسربچه، پسربچهٔ پنجم (V) را با کلاهش (۵)، اضافه کنیم. چطور می‌توان برای پنج پسربچه، همهٔ حالت‌های تقسیم کلاه‌ها را پیدا کرد، به نحوی که هیچ کدام از آن‌ها، کلاه خودش را نداشته باشد؟

از جدول معلوم است که $x_۴ = ۹$، طوری که هیچ پسربچه‌ای صاحب کلاه خودش نباشد. پسربچهٔ پنجم را به چهار پسربچهٔ دیگر اضافه می‌کنیم؛ او می‌تواند کلاهش را با هرکدام از چهار نفر دیگر، عوض کند. به این ترتیب، گروه‌های پنج نفری به دست می‌آید که در هر کدام از آن‌ها هرکس کلاه دیگری را به سر گذاشته است. از هرکدام از نه حالت مربوط به چهار پسربچه، ۴ حالت پنج‌نفری پیدا می‌شود که در هریک از آن‌ها، هیچ پسربچه‌ای صاحب کلاه خود نیست.

مثلاً، اگر این حالت را در نظر بگیریم:

پسربچه‌ها:	IV	III	II	I
کلاه‌ها:	۱	۴	۳	۲

چهار حالت زیر برای تقسیم پنج کلاه بین پنج پسربچه به‌دست می‌آید:

پسربچه‌ها:	V	IV	III	II	I

تقسیم کلاه‌ها :

۲ ۱ ۴ ۳ ۵
۳ ۱ ۴ ۵ ۲
۴ ۱ ۵ ۳ ۲
۱ ۵ ۴ ۳ ۲

در هرکدام از این حالت‌ها، هیچ کس صاحب کلاه خودش نیست. به همین ترتیب، برای هر کدام از نه حالت مربوط به چهار پسربچه، چهار حالت مختلف برای پنج پسربچه به‌دست می‌آید، که در هریک از آن‌ها شرط مساله صدق می‌کند، یعنی هر بچه‌ای صاحب کلاه دیگری است. به این ترتیب، تا این‌جا

$$۴x_۴ = ۴ \times ۹ = ۳۶$$

حالت مختلف برای تقسیم کلاه بین پنج پسربچه، با توجه به شرط مساله، پیدا می‌شود.

به همین ترتیب، می‌توان برای n پسربچه و x_n حالت مختلف وضع کلاه‌ها، استدلال کرد و به $n \cdot x_n$ حالت مختلف، برای $(n + ۱)$ پسربچه رسید.

ولی نه $۳۶ = ۴x_۴$ و نه nx_n، مقدار $x_۵$ یا $x_{n+۱}$ را به طور کامل نمی‌دهند.

در جدول همهٔ ترتیب‌های ممکن‌کلاه‌های چهار پسربچه (صفحه‌های قبل) به اندازهٔ $۸ = ۲ \times ۴ = ۴x_۲$ نوع ترتیب وجود داشت که در هر کدام از آن‌ها، تنها یکی از پسربچه‌ها، صاحب کلاه خود بود و سه پسربچهٔ دیگر کلاه عوضی به سر داشتند. اگر پسربچهٔ پنجم، کلاه خود را با پسربچه‌ای که صاحب کلاه خودش است، عوض کند، در آن صورت، هیچ کدام از پنج پسربچه صاحب کلاه خودش نمی‌شود. مثلاً، اگر حالتی را در نظر بگیریم که

در آن پسربچهٔ اول، صاحب کلاه خودش است:

I	II	III	IV
۱	۳	۴	۲
۱	۴	۲	۳

به این دو حالت از پنج کلاه و پنج پسربچه می‌رسیم:

I	II	III	IV	V
۵	۳	۴	۲	۱
۵	۴	۲	۳	۱

که در هر حالت، هر پسربچه‌ای، کلاه دیگری را به سر دارد. بنابراین، از هشت حالت مربوط به وضع چهار کلاه، که در هر حالت آن تنها یکی از پسربچه‌ها، صاحب کلاه خودش است، می‌توان با اضافه شدن نفر پنجم، به

$$۴ \times ۲ = ۴x_۳ = ۸$$

وضع جدید پنج کلاه رسید که دربارهٔ هرکدام از آن‌ها، هیچ پسر بچه‌ای، صاحب کلاه خود نیست.

به همین ترتیب، می‌توان دربارهٔ n پسربچه‌ای که پسربچهٔ $(n + ۱)$ام به آن‌ها اضافه می‌شود، استدلال کرد. برای n پسربچه، به تعداد $n \cdot x_{n-۱}$ وضع از n کلاه داریم، به نحوی که در هرکدام از آن‌ها، تنها یک پسربچه، کلاه خود را به سر دارد؛ وقتی که پسربچهٔ $(n + ۱)$ام، کلاه خود را با این پسربچه، عوض کند، $n \cdot x_{n-۱}$ وضع جدید از $(n + ۱)$ کلاه به دست می‌آید، که در هیچ کدام از آن‌ها، هیچ پسربچه‌ای صاحب کلاه خود نیست.

از وضع نخستین چهار کلاه، وقتی که دو پسربچه یا همهٔ آن‌ها صاحب کلاه خود باشند، نمی‌توان با اضافه کردن پسربچهٔ پنجم، طوری تعویض کلاه را انجام داد تا به حالتی برسیم که هریک از پنج نفر، کلاه دیگری را به سر داشته باشد.

بنابراین، وقتی با پنج پسربچه سروکار داشته باشیم، تعداد حالت‌های مختلف وضع کلاه‌ها، به نحوی که با شرط مساله سازگار باشد، چنین می‌شود:

$$x_۵ = ۴x_۴ + ۴x_۳ = ۴(x_۴ + x_۳)$$

و در حالت کلی، برای $(n + ۱)$ پسربچه به دست می‌آید:

$$x_{n+۱} = nx_n + nx_{n-۱} = n(x_n + x_{n-۱})$$

و این همان رابطهٔ برگشتی است که به کمک آن می‌توان تعداد حالت‌های مختلف n کلاه را از روی تعداد حالت‌های مختلف $(n - ۱)$ و $(n - ۲)$ کلاه، پیدا کرد. پاسخ مربوط به n کلاه را وقتی می‌توانیم به دست آوریم که پاسخ مربوط به $(n - ۱)$ و $(n - ۲)$ کلاه را داشته باشیم. چون برای $n = ۲$ و $n = ۳$، مقادیر $x_۲$ و $x_۳$ را می‌دانیم، می‌توانیم مقدار x_n را، برای هر مقدار n، پیدا کنیم.

با در دست داشتن رابطهٔ برگشتی در حالت کلی

$$\boxed{x_{n+۱} = n(x_n + x_{n-۱})}$$

و این‌که داریم: $x_۲ = ۱$ و $x_۳ = ۲$، به ترتیب به دست می‌آید:

$$x_۴ = ۳(x_۳ + x_۲) = ۳(۲ + ۱) = ۹$$
$$x_۵ = ۴(x_۴ + x_۳) = ۴(۹ + ۲) = ۴۴$$
$$x_۶ = ۵(x_۵ + x_۴) = ۵(۴۴ + ۹) = ۲۶۵$$
$$x_۷ = ۶(x_۶ + x_۵) = ۶(۲۶۵ + ۴۴) = ۱۸۵۴$$

و غیره.

اگر فرض کنیم

$$x_۱ = ۰$$

و این طبیعی است، زیرا، یک پسربچه نمی‌تواند کلاهش را با کس دیگری عوض کند، آن وقت $x_۳$ را می‌توان بنابر رابطهٔ کلی پیدا کرد:

$$x_۳ = ۲(x_۲ + x_۱) = ۲(۱ + ۰) = ۲$$

این روش حل مساله را، برگشتی نامیدیم، به این مناسبت که بنابر آن، پرسش مربوط به هر عددی، منجر به همان پرسش دربارهٔ عددهای کوچکتر می‌شود. برای این‌که پاسخ خود را برای عدد داده شدهٔ n پیدا کنیم، باید قبلاً پاسخ مودر نظر را دربارهٔ همهٔ عددهای طبیعی کوچکتر از n، پیدا کنیم. این روش، ممکن است طولانی و خسته کننده باشد، ولی در بسیاری از مساله‌ها، نمی‌توان راه‌حل دیگری پیدا کرد.

راه دیگری برای پیدا کردن رابطهٔ برگشتی[1]

رابطهٔ برگشتی را، که به کمک آن می‌توانیم مساله خود را حل کنیم، می‌شود از راه دیگری هم به دست آورد.

همهٔ انواع حالت‌های مختلف پنج کلاه را، به نحوی که هیچ پسربچه‌ای صاحب کلاه خود نباشد، یعنی $x_۵$ را می‌توان به دو گروه، تقسیم کرد:

گروه A، که در آن پسربچهٔ اول، کلاه خود را با یکی از چهار پسربچهٔ دیگر عوض کرده است (یعنی تعویض متقابل بین پسربچهٔ اول، با یکی از پسربچه‌های دیگر انجام گرفته است)؛

گروه B، که در آن، چنین تعویض متقابلی، برای پسربچهٔ اول، پیش نیامده است. تعداد حالت‌ها A و B را محاسبه می‌کنیم.

---

۱ ــ این راه را برای خواننده‌ای گذاشته‌ایم که از بعضی دشواری‌ها نمی‌ترسد، والا می‌توان از خواندن آن صرف‌نظر کرد.

همهٔ حالت‌های ممکنی را حساب می‌کنیم، که در آن‌ها، پسربچهٔ اول، کلاه خود را با یکی از دیگران، عوض کرده باشد.

I	II	III	IV	V
۲	۱	۴	۵	۳
۲	۱	۵	۳	۴
۳	۴	۱	۵	۲
۳	۵	۱	۲	۴
۴	۵	۲	۱	۳
۴	۳	۵	۱	۲
۵	۳	۴	۲	۱
۵	۴	۲	۳	۱

خالت‌هایی از وضع کلاه‌ها، به نحوی که در هر حالت، پسربچهٔ اول،کلاه خود را، بایکی از دوستانش عوض کرده است.

روی هم، به اندازهٔ $۴ \times ۲ = ۲x_۳$ ترتیب، برای کلاه‌ها، به دست می‌آید. در حالتی که با $(n + ۱)$ پسربچه سروکار داشته باشیم، روی‌هم

$$n \cdot x_{n-۱}$$

ترتیب کلاه، از نوع گروه A خواهیم داشت، که با شرط مساله، سازگار باشد.

حالا به حالت‌هایی می‌پردازیم، که در آن‌ها، تعویض متقابل کلاه، بین پسربچه اول و دیگران انجام نگرفته باشد (گروه B). مثلاً، فرض کنیم که پسربچهٔ اول، کلاه ۲ را به سر داشته باشد، باقی می‌ماند:

II	III	IV	V
۱	۳	۴	۵

این چهار پسربچه، به چند طریق می‌توانند کلاه‌های خود را عوض کنند به نحوی که هیچ‌کدام از آن‌ها صاحب کلاه خود نباشد؟

اگر می‌داشتیم:

II	III	IV	V
۲	۳	۴	۵

پرسش ما مربوط می‌شد به حل مساله در حالت چهار پسربچه و تعداد حالت‌های ممکن برابر $x_۴$.

حالا، وقتی که داریم:

$$\begin{array}{cccc} \mathrm{II} & \mathrm{III} & \mathrm{IV} & \mathrm{V} \\ ۱ & ۳ & ۴ & ۵ \end{array}$$

چند حالت ممکن، با توجه به شرط مساله، وجود دارد؟

در این‌جا هم تعداد حالت‌های ممکن، همان $x_۴$ است، زیرا اگرچه پسربچهٔ II، کلاه ۱ را به سر دارد، ولی در وضع گروه B، او نمی‌تواند صاحب این کلاه باشد. وقتی که پسربچهٔ II، کلاه ۱ را داشته باشد، به معنای این است که پسربچهٔ اول، کلاه خود را با پسربچهٔ دوم عوض کرده است و بنابراین وضعی برای کلاه‌ها پیش می‌آید که به گروه A مربوط است. بنابراین، تعداد حالت‌های گروه B، وقتی که پسربچهٔ اول، کلاه ۲ را به سر دارد، برابر $x_۴$ می‌شود.

از آن‌جا که پسربچهٔ اول می‌تواند در ابتدا، کلاه هرکدام از چهار نفر دیگر را به سر داشته باشد، تعداد کل حالت‌های گروه B، برابر با $۴x_۴$ می‌شود.

اگر همین استدلال را برای $(n + ۱)$ پسربچه بکنیم، تعداد حالت‌های گروه B، دربارهٔ آن چنین می‌شود.

$$nx_n$$

چون همهٔ حالت‌های ممکن وضع کلاه‌ها، عبارت است از حالت‌های مختلفی که هم در گروه A و هم در گروه B جمع شده‌اند، بنابراین داریم:

$$x_۵ = ۴x_۴ + ۴x_۳ = ۴(x_۴ + x_۳)$$

$$x_{n+۱} = nx_a + nx_{n-۱} = n(x_n + x_{n+۱})$$

به همان رابطهٔ برگشتی می‌رسیم که با استدلال نخست هم به‌دست آورده بودیم.

***

نویسندهٔ کتاب، بارها این مساله را برای دانش‌آموزان از کلاس هفتم تا دهم حل کرده است. البته در کلاس دهم، علاوه بر روش‌هایی که در این‌جا آوردیم، از نظریهٔ آنالیز ترکیبی هم استفاده کرده است. وقتی که حل مساله تمام می‌شود، معمولاً دانش‌آموزان می‌پرسیدند: از این دو روشی که برای پیدا کردن رابطهٔ برگشتی استفاده کردیم، کدام بهتر است؟

از بین این دو روش، روشی بهتر است که فهم آن برای ما ساده‌تر باشد. ولی بهترین روش‌ها، آن است که خودمان آن را پیدا کرده باشیم. و این امکان، همیشه وجود دارد.

پروفسور *واسیلی پترویچ یرماکوف* (۱۸۴۵_۱۹۲۲) که در ریاضیات عالی کاملاً شناخته شده است و تلاش‌های زیادی هم برای آموزش بهتر ریاضیات در دبیرستان، کرده است، روش خاصی برای مطالعهٔ کتاب‌های ریاضی داشت. او سطر اول را می‌خواند، تا ببیند مؤلف چه مساله‌ای را در برابر خود گذاشته است، سپس سطر آخر را می‌خواند تا بداند، مولف چه نتیجه‌ای گرفته است. بعد کتاب را می‌بست و خودش به حل مساله می‌پرداخت تا نتیجهٔ لازم را به دست آورد. اغلب، روشی که *یرماکوف*، برای حل مساله پیدا می‌کرد، با روش مولف کتاب فرق داشت. و به این ترتیب است که دانش، با روش‌های تازه‌ای غنی‌تر می‌شود.


یرماکوف

چقدر خوب است، وقتی دانش‌آموزان با مساله‌هایی، که برای آن‌ها تازگی دارد، مواجه می‌شوند، از روش پرفسور *یرماکوف* استفاده کنند و کوشش کنند

که خودشان راه‌حل مساله را بیابند و چه بهتر که بتوانند روشی اختصاصی و نو برای حل مساله، کشف کنند. تقریباً همهٔ ریاضی‌دانان بزرگ، کار آفرینندگی خود را از همین‌جا آغاز کردند که خودشان به طور مستقل، مساله‌ها را حل کنند. گورکی فئودوسویچ *وارانوی*، یکی از پرنبوغ‌ترین ریاضی‌دانان روس (۱۸۶۸ـ۱۹۰۸)، کارهای خلاقهٔ خود را از همین راه، یعنی حل مستقل مساله‌های ساده در «مجلهٔ ریاضیات مقدماتی» که به‌وسیلهٔ *یرماکوف* برای دبیران و دانش‌آموزان چاپ می‌شد، آغاز کرد[1]. بسیاری از ریاضی‌دانان بزرگ دیگر هم، مثل د. آ. *گراو*، ای. ای. *ایوانو*، و ف. *کاگان*، ای. ای. *چیستیاکور* و دیگران، نخستین نوشته‌های دوران جوانی خود را در همین مجله، انتشار دادند.

مسالهٔ هندی

نارایانا، ریاضی‌دان هندی سدهٔ چهاردهم، این مساله را طرح کرده است:

«گاو ماده‌ای داریم که در آغاز هر سال یک گوسالهٔ ماده به دنیا می‌آورد. هر گوساله هم از آغاز سال چهارم زندگی خود، در آغاز هر سال، گوساله مادهٔ خود را می‌آورد. حالا، شاگرد دانشمند من، بگو که در بیست سال، چند گاو خواهیم داشت؟»

حل. این مساله را می‌توان به کمک جبری که در کلاس‌های بالا می‌خوانیم حل کرد، ولی ما آن را به کمک همان روش برگشتی، حل می‌کنیم که از بسیاری جهت‌ها، ساده‌تر از حل آن به کمک جبر است. نباید از واقعی نبودن شرط‌های مساله، ناراحت بود (البته می‌توان با کمی تغییر، آن را واقعی‌تر کرد)، برای پیدا کردن روش حل یک مساله، غیر واقعی بودن صورت آن، خیلی اهمیت ندارد. ما هم، صورت مساله را، به احترام ریاضی‌دان هندی، به همان شکل

۱ـ تجزیهٔ چندجمله‌ای‌ها به ضرب عامل‌های اول، براساس خاصیت ریشه‌های معادله درجهٔ دوم: «مجلهٔ ریاضیات مقدماتی» ـ ۱۸۸۶ ـ صفحهٔ ۱۱.

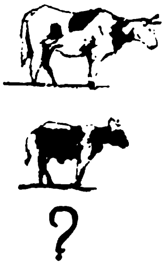
اصلی خود، نگه می‌داریم.

رابطهٔ برگشتی را برای حل این مساله می‌توان به سادگی به‌دست آورد. همان‌طور که می‌دانیم، این رابطه، حلقهٔ نخستین برای پیدا کردن جواب است.

در سال اول یک گاو داریم و یک گوساله‌ای که در ابتدای سال آورده است، یعنی روی‌هم ۲ گاو. در ابتدای سال دوم، یک گوساله به آن‌ها اضافه می‌شود؛ روی‌هم ۳ گاو.

در ابتدای سال سوم، باز هم یک گوساله اضافه می‌شود؛ روی‌هم می‌شود ۴ گاو.

در ابتدای سال چهارم، به ۴ گاو ما، دو گوساله اضافه می‌شود، زیرا گوسالهٔ اول هم در این موقع، نخستین گوسالهٔ خود را به دنیا می‌آورد.



در ابتدای سال پنجم، گوساله‌ای هم که در ابتدای سال دوم به دنیا آمده بود، نخستین گوسالهٔ خود را می‌آورد، بنابراین، به مجموعهٔ ما، ۳ گاو اضافه می‌شود:

$$۶ + ۳ = ۹$$

از ابتدای سال چهارم، تعداد گاوهای ما، بنابر یک رابطهٔ برگشتی به‌دست می‌آید. اگر تعداد گاوها را در سال چهارم به $x_۴$ و به طور کلی در سال nام به x_n نشان دهیم، داریم:

$$x_۴ = x_۳ + x_۱,\ x_۵ = x_۴ + x_۲,$$

$$x_n = x_{n-۱} + x_{n-۳}$$

رابطه روشن است، زیرا بنابر فرض مساله، برای پیدا کردن تعداد گاوها (و گوساله‌ها) در هر سال، باید تعداد گوساله‌هایی که در این سال به دنیا

می‌آیند، به تعداد گاوهایی که در سال قبل وجود داشته است، اضافه کنیم؛ ولی تعداد گوساله‌هایی که در هر سال به دنیا می‌آید برابر است با تعداد گاوها (و گوساله‌ها) در سه سال پیش.

به این ترتیب، به این جدول می‌رسیم که به طور مستقیم و از روی رابطهٔ $x_n = x_{n-۱} + x_{n-۳}$، محاسبه شده است:

تعداد گاوها و گوساله‌ها	سال
۲	I
۳	II
۴	III
۶	IV
۹	V
۱۳	VI
۱۹	VII
۲۸	VIII
۴۱	IX
۶۰	X
۸۸	XI
۱۲۹	XII
۱۸۹	XIII
۲۷۷	XIV
۴۰۶	XV
۵۹۵	XVI
۸۷۲	XVII
۱۲۷۸	XVIII

۱۸۷۳	XIX
۲۷۴۵	XX

به این ترتیب، اگر گاوها بنابر شرط‌های مساله زیاد شوند، در بیست سال یک گله بزرگ شامل ۲۷۴۵ گاو خواهیم داشت.

درس نهم

حل مساله‌هایی که به محاسبه نیاز ندارند.

در حل مساله‌های گذشته، به هیچ آگاهی ریاضی، به‌جز چهار عمل اصلی حساب، نیاز نداشتیم. در این درس، از حل مساله‌هایی صحبت می‌شود که حتا به عمل‌های حسابی هم نیازی ندارند.

مساله‌ای دربارهٔ ده قلعه. امیر دستور داد جای مستحکمی شامل ده قلعه بسازند و برای دفاع در برابر هجوم دشمن، آن‌ها را به‌وسیلهٔ خندق‌هایی به هم مربوط کنند. خندق‌ها، باید به صورت پنج خط راست باشند و بر هر کدام از آن‌ها، چهار قلعه قرار گرفته باشد.

مهندسان، نقشه را به شکل یک ستارهٔ پنج‌پر کشیدند. ولی امیر آن را نپسندید، زیرا همهٔ قلعه‌ها در خط مستقیم حمله از بیرون قرار داشت. او می‌خواست، یک یا چند قلعه، به وسیلهٔ خندق‌ها از همه‌طرف محاصره و قابل دفاع باشد، به نحوی که دشمن نتواند به آن برسد.

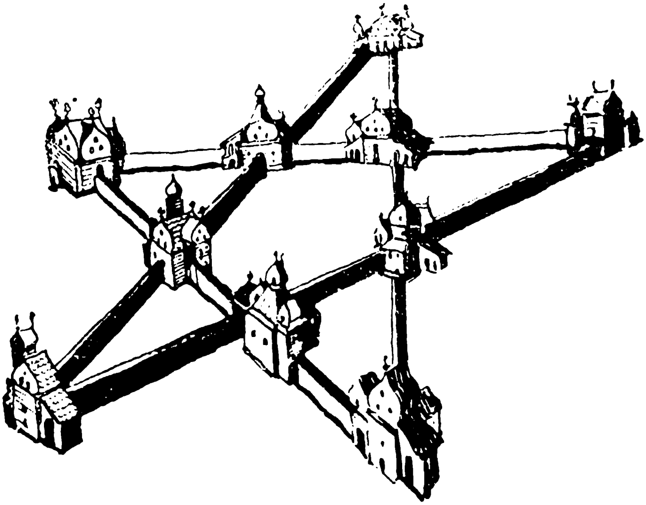
مهندسان اطمینان می‌دادند که چنین راه‌حلی وجود ندارد، امیر هم پافشاری می‌کرد که راه‌حل مورد نظر او را پیدا کنند.

سرانجام، توانستند راه‌حل را پیدا کنند، آن‌هم چند راه‌حل که از نظر نظامی هم‌ارز نبودند.

کوشش کنید این راه‌حل‌ها را پیدا کنید.

حل. مساله را دست‌کم، به پنج طریق می‌توان حل کرد.

در هرکدام از چهار طرح نخست، یکی از قلعه‌ها بین خندق‌های دفاعی قرار دارد و در طرح پنجم، دو قلعه دارای این مزیت هستند.

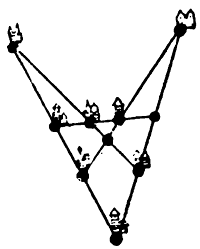


آیا راه‌حل‌های دیگری برای این مساله وجود دارد؟

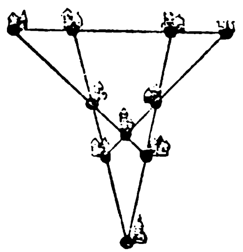
این مساله، نمونه‌ای از مساله‌هایی است که در آن‌ها از وضع استقرار نقطه‌ها، گفت‌وگو می‌شود. یک انگلیسی که به حل مساله‌های معمایی علاقه‌مند

بود و تمام زندگی خود را صرف آن کرد و چند کتاب در این‌باره منتشر کرد، اطمینان می‌داد که برای حل این‌گونه مساله‌ها، هیچ قاعده‌ای وجود ندارد و تنها از طریق آزمایش می‌توان جواب‌ها را پیدا کرد.

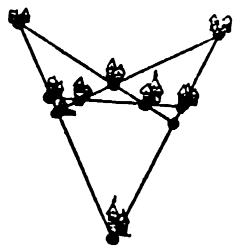
او مساله‌ای شبیه مسالهٔ ما را هم حل کرده است و برای شکل‌هایی هم که به‌دست آورده است، نام‌هایی انتخاب کرده است: جواب اول را (که ما در ابتدای این داستان، ستارهٔ پنج‌پر نامیدیم)، ستاره نامیده است و پنج جواب دیگر را به‌ترتیب: قیف، پیکان، قیچی، میخ و پرگار.



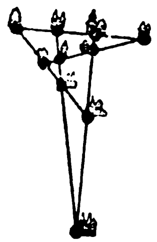
پیکان



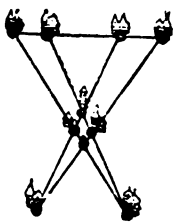
قیف



پرگار



میخ



قیچی

او برای حل مساله‌های مربوط به استقرار نقطه‌ها، تنها این آگاهی را می‌دهد:

«روش‌های ستاره، قیف، پیکان، قیچی، میخ و پرگار را امتحان کنید، ولی اگر این‌ها نتوانستند کمکی به شما بکنند، باید از تیزهوشی خودیاری بخواهید و یا در انتظار تیزهوشی دیگران بمانید».

این امکان وجود دارد که مسالهٔ مربوط به ده قلعه، جواب‌های دیگری هم داشته‌باشد، از شما می‌خواهیم که در این‌باره آزمایش کنید و در صورتی که موفق شدید، ما را هم آگاه کنید.

مسالهٔ نیوتون. در دو کتاب قدیمی انگلیسی (مربوط به سال‌های ۱۸۲۱ و ۱۸۵۲) که شامل مساله‌های سرگرم کننده است، مساله‌ای دربارهٔ وضع استقرار نقطه‌ها وجود دارد. در هر دو کتاب، این مساله، به صورت شعر داده شده است، که البته شعرها با هم متفاوتند. در کتاب نخست، این شعر چنین است:

your ald I want, nine trees to plant
In rows just hall a score;
And let there be in each row three
Solve this; I ask no more

که به این معنا است:

«من به یاری شما نیاز دارم تا نه درخت را در ده ردیف، طوری بکارم که در هر ردیف، سه درخت وجود داشته باشد. بگویید چگونه، من چیز بیشتری از شما نمی‌پرسم».

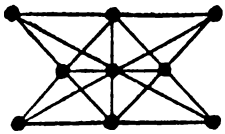
این مساله، به نام *ایزاک نیوتون* (۱۶۴۲_۱۷۲۷)، ریاضی‌دان بزرگ ثبت شده است و شباهت آن، با مسالهٔ قبل روشن است.

از صورت مساله، ظاهراً معلوم می‌شود که به ۳۰ = ۱۰ × ۳ درخت نیاز داریم، در حالی‌که تنها ۹ درخت داریم. این به معنای آن است که دست‌کم بعضی از درخت‌ها، باید در نقطهٔ برخورد چند ردیف باشند. این‌گونه

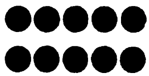
نقطه‌ها را، نقطه‌های تقسیم می‌نامیم. می‌توان حساب کرد که چند نقطهٔ تقسیم و چگونه نقطه‌های تقسیمی لازم است تا بتوان بنابر شرط‌های مساله، عمل کرد.

این محاسبه، به جست‌وجوی جواب‌های ممکن، کمک می‌کند.

اگر هر ۹ نقطه محل برخورد دو یا سه ردیف باشند، مثل این است که ۱۸ یا ۲۷ نقطه داریم و بنابراین نمی‌توانیم جوابی برای مساله پیدا کنیم. مساله، وقتی جواب دارد که نقطه‌هایی در محل برخورد چهار ردیف، یا بیشتر، وجود داشته باشد. مثلاً، ۳ درخت در محل برخورد چهار ردیف و ۶ درخت در محل برخورد سه ردیف؛ یا ۶ درخت در محل برخورد چهار ردیف و ۳ درخت در محل برخورد دو ردیف باشند، تا روی هم ۳۰ نقطه لازم به‌دست آید. بنابراین، می‌توان، پشت سرهم حالت‌های ممکن را محاسبه کرد و سپس آزمایش کرد، آیا این امکان روی صفحه وجود دارد یا نه. در این‌جا یکی از جواب‌های مسالهٔ نیوتون داده شده است. در این جواب، ۳ نقطه در محل برخورد چهار ردیف و ۶ نقطه، در محل برخورد سه ردیف، قرار دارد. جواب‌های دیگری را خودتان پیدا کنید.



مسالهٔ لوئیس کرول. یکی از جالب‌ترین مساله‌ها، در مورد استقرار نقطه‌ها بر صفحه، مسالهٔ *لوئیس کرول* است. ده سکه (یا ژتون) به این ترتیب، چیده شده است:



باید تنها ۴ سکه را طوری جابه‌جا کرد که پنج ردیف ۴ سکه‌ای به‌دست آید.

مساله تا ۳۰۰ جواب مختلف دارد. می‌خواهیم تا جایی که ممکن است، تعداد بیشتری از جواب‌ها را پیدا کنیم و به‌ویژه، روشی به‌دست آوریم که به کمک آن بتوان، این جواب‌ها را جست‌وجو کرد.

این مساله، به شکل‌های مختلف طرح شده است، ولی نه *کرول* و نه دیگران به همه، یا تاجایی که ممکن است، به همهٔ جواب‌ها نپرداخته‌اند و روش کلی، برای جست‌وجوی جواب‌ها، نداده‌اند.

حل. ۱) می‌توان یک نقطه را از یک ردیف و ۳ نقطه را از ردیف دیگر، جابه‌جا کرد. با جابه‌جا کردن دو نقطه از هر ردیف، نمی‌توان به پنج ردیف چهار نقطه‌ای رسید.

۲) سه نقطه را، در ردیف بالا حرکت می‌دهیم، بنابراین، دو نقطه در این ردیف در جای خود باقی می‌ماند. هر جوابی که از این وضع به‌دست آید، شبیه جواب نظیر آن در حالتی است که در ردیف پایین، دو نقطهٔ بدون حرکت، باقی بماند. با توجه به این موضوع، تعداد ساختمان‌هایی که باید انجام دهیم، نصف می‌شود.

۳) دو نقطهٔ بدون حرکت را در ردیف بالا، به طریقه‌های مختلف می‌توان انتخاب کرد. تعداد این حالت‌ها برابر است با تعداد حالت‌هایی که می‌توان دو چیز را از میان پنج چیز انتخاب کرد (ردیف دو چیزی را که انتخاب می‌کنیم، اهمیتی ندارد). به سادگی می‌توان فهمید که این انتخاب را به ۱۰ طریق می‌توان انجام داد:

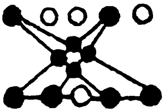
$$۱,۲;\quad ۱,۳;\quad ۱,۴;\quad ۱,۵;\quad ۲,۳;$$
$$۲,۴;\quad ۲,۵;\quad ۳,۴;\quad ۳,۵;\quad ۴,۵$$

(در کلاس‌های بالاتر می‌خوانید که این عمل را ترکیب ۵ عنصر، ۲ به ۲ گویند و این‌طور محاسبه می‌کنند: $C_۵^۲ = \frac{۵ \times ۴}{۱ \times ۲} = ۱۰$).

۴) از ردیف پایین می‌توان، نقطهٔ اول یا دوم یا سوم یا چهارم و یا پنجم را جابه‌جا کرد، بنابراین، هریک از ۱۰ حالت مربوط به ردیف بالا، متناظر با ۵ حالت از ردیف پایین است و در نتیجه روی‌هم ۵۰ حالت پیدا می‌شود.

۵) برای هرکدام از این حالت‌ها، دست‌کم یک جواب برای مساله وجود

دارد. این جواب به این ترتیب به‌دست می‌آید که هرکدام از دو نقطهٔ ردیف بالا را به دو نقطهٔ ردیف پایین طوری وصل کنیم که خط‌های راست به دست آمده، با یکدیگر برخورد داشته باشند و سپس چهار نقطهٔ قابل جابه‌جایی را در محل برخورد این خط‌ها قرار دهیم. برای این‌که چنین نقطه‌های برخوردی به‌دست آید، کافی است نقطهٔ چپ بالا را به دو نقطهٔ راست پایین و نقطهٔ راست بالا را به دو نقطهٔ چپ پایین وصل کنیم. در این صورت، ۴ ردیف ۴ نقطه‌ای به‌دست می‌آید، علاوه بر آن، یک ردیف ۴ نقطه‌ای هم در پایین وجود دارد.



اگر جای نقطه‌هایی را که جابه‌جا شده‌اند با دایره‌های توخالی نشان دهیم، مثلاً، شکل پهلو را به‌دست می‌آوریم.

این‌گونه جواب را می‌توان در هریک از ۵۰ حالتی که دو نقطهٔ جابه‌جا نشده را، در ردیف بالا داریم، به‌دست آورد. همین جواب‌ها را هم می‌توان برای حالتی که دو نقطهٔ جابه‌جا نشده، در ردیف پایین قرار گرفته است پیدا کرد. تا این‌جا، ۱۰۰ جواب مختلف به‌دست می‌آید. این جواب‌ها را، *جواب‌های داخلی* می‌نامیم، به این مناسبت که نقطه‌های جابه‌جا شده را بین ردیف‌های نخستین، قرار داده‌ایم.

۶) طبیعی است متوجه شویم که جواب‌های مساله، منحصر به جواب‌های داخلی نیست، زیرا می‌توان‌بعضی‌از نقطه‌های‌جابه‌جا شده‌را درخارج دو ردیف نخستین قرار داد. این جواب‌ها را، *جواب‌های مختلط* می‌نامیم. برای پیدا کردن این جواب‌ها، باید هر ۵۰ حالتی را که دو نقطهٔ بی‌حرکت در بالا و چهار نقطهٔ بی‌حرکت در پایین داریم، بررسی کنیم. برای این ۵۰ حالت،

نام‌هایی انتخاب می‌کنیم:

$$\mathrm{I}_{۱},\ \mathrm{I}_{۲},\ \ldots,\ \mathrm{I}_{۱۰},\ \mathrm{II}_{۱},\ \mathrm{II}_{۲},\ \ldots,\ \mathrm{II}_{۱۰},\ \ldots,\ \mathrm{V}_{۱},\ \mathrm{V}_{۲},\ \ldots,\ \mathrm{V}_{۱۰}$$

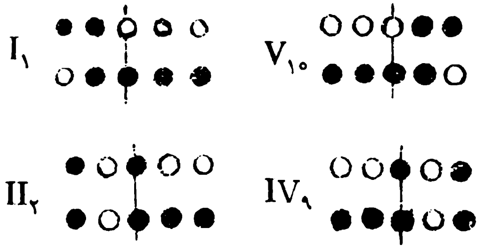
$\mathrm{I}_{۱}$	●●○○○	○●●●●
$\mathrm{I}_{۲}$	●○●○○	○●●●●
$\mathrm{I}_{۳}$	●○○●○	○●●●●
$\mathrm{I}_{۴}$	●○○○●	○●●●●
$\mathrm{I}_{۵}$	○●●○○	○●●●●
$\mathrm{I}_{۶}$	○●○●○	○●●●●
$\mathrm{I}_{۷}$	○●○○●	○●●●●
$\mathrm{I}_{۸}$	○○●●○	○●●●●

$\mathrm{I}_{۹}$	○○●○●	○●●●●
$\mathrm{I}_{۱۰}$	○○○●●	○●●●●
$\mathrm{II}_{۲}$	●○●○○	●○●●●
$\mathrm{III}_{۴}$	●○○○●	●●○●●
$\mathrm{IV}_{۵}$	○●●○○	●●●○●
$\mathrm{V}_{۳}$	●○○●○	●●●●○

رقم‌های رومی نشان می‌دهد که کدام نقطه را از ردیف پایین جدا کرده‌ایم و عددهای ۱ ، ۲، . . .، ۱۰ (اندیس‌ها) معرف هرکدام از ۱۰ حالتی است که برای جابه‌جا کردن دو نقطهٔ ردیف بالا، وجود دارد.

به این ترتیب، هرکدام از نشانه‌های I_1، I_2، ...، V_{10}، نمایندهٔ یکی از ۵۰ حالت ممکن می‌شود (برای نمونه شکل صفحهٔ قبل را ببینید).

۷) این ۵۰ وضعی که برای نقطه‌ها پیش می‌آید، دوبه‌دو نسبت به خط راستی که از سومین نقطهٔ هر دو ردیف می‌گذرد، قرینهٔ یکدیگرند. مثلاً، I_1 با V_{10} و II_2 با IV_9 قرینه است و غیره. هر جوابی که برای یکی از حالت‌های نقطه‌ها، وجود داشته باشد؛ متناظر با جواب مشابهی، برای قرینهٔ آن حالت است.



۸) زوج‌های متقارن، این‌ها هستند:

I_1, V_{10}; I_2, V_9; I_3, V_7; I_4, V_4; I_5, V_8; I_6, V_6;
I_7, V_3; I_8; V_5; I_9, V_2; I_{10}, V_1; II_1, IV_{10}; II_2, IV_9; II_3, IV_7;
II_4, IV_4; II_5, IV_8; II_6, IV_6; II_7, IV_3; II_8, IV_5; II_9, IV_2; II_{10}, IV_1;
$III_1, III_{10}, III_2, III_9$; III_3, III_7; III_5, III_8

III_4 و III_6 دارای زوج متقارن نیستند.

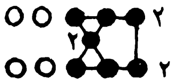
به این ترتیب باید ۲۶ حالت را بررسی کنیم. هر جواب برای هرکدام از این حالت‌ها، درضمن متناظر است با جوابی که از جابه‌جا کردن ردیف‌های بالا و پایین به‌دست می‌آید.

۹) ماهر ۲۶ حالت اصلی مساله *کرول* را می‌دهیم. برای ۲۴ حالت از آن‌ها، زوج متقارن وجود دارد. برای دو حالت I_2 و I_3، جواب زوج‌های متقارن آن‌ها V_9 و V_7 را هم داده‌ایم.

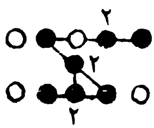
برای بقیهٔ حالت‌ها، تنها جواب حالت اصلی داده شده است و خواننده باید خودش جواب‌های حالت متقارن آن را پیدا کند.

۱۰) در بعضی حالت‌ها، حتا یک جواب مختلط هم پیدا نمی‌شود (جواب داخلی، برای همهٔ حالت‌ها، وجود دارد). همهٔ این حالت‌ها، به این ترتیب مشخص می‌شود که اگر خط‌های راستی را در نظر بگیریم که از نقطه‌های ردیف بالا به هریک از چهار نقطهٔ ردیف پایین وصل می‌شود، خط‌های موازی به‌دست می‌آید و نقطه‌های برخورد داخلی را برای به وجود آمدن در ردیف غیر افقی داخلی، تامین نمی‌کند. به‌این‌ترتیب، ۱۰۰ جواب داخلی و ۱۸۰ جواب مختلط به‌دست می‌آید. البته، این‌ها حداقل جواب‌ها است و جست‌وجوی جواب‌های تازه، ممکن و جالب است.

۱۱) اگر به‌جای نقطه‌ها، از سکه (یا ژتون) استفاده کنیم و فرض کنیم که بتوانیم دو سکه را روی هم قرار دهیم، می‌توانیم جواب‌های تازه‌ای به دست آوریم. در این‌جا، دو نمونه از این جواب‌ها داده شده است.



جایی که عدد ۲ را نوشته‌ایم، به معنای آن است که دو ژتون روی‌هم قرار گرفته است.



در شکل اول، پنج ردیف ۴ نقطه‌ای وجود دارد.

۱۲) یادآوری: برای این‌که در هر حالت، تمام جواب‌ها را پیدا کنیم، از نخستین نقطهٔ ردیف بالا، دو خط راست، به همهٔ روش‌های ممکن، به دو نقطهٔ پایین وصل می‌کنیم. اگر نقطه‌های ردیف پایین را به ترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ بنامیم، حالت‌های زیر برای عبور خط‌های راست، از نقطه‌هاپایین وجود دارد:

۱, ۲; ۱, ۳; ۱, ۴; ۲, ۳; ۲, ۴; ۳, ۴

حالت آخر، همیشه جواب داخلی را می‌دهد و بقیه ممکن است جواب‌های خارجی را بدهند. اگر، خط‌های موازی پیدا نشود، جوابی برای مساله به‌دست

می‌آید. بنابراین، حداکثر تعداد جواب‌ها، برابر است با ۵ و همان‌طور که در شکل می‌بینید، این وضع تنها برای حالت‌های $I_۴$ و $V_۴$ وجود دارد.

۱۳) نویسندهٔ این مساله، *چارلز لیوتویج دوجسون* (۱۸۳۲ـ۱۸۹۸)، استاد ریاضیات در دانشگاه آکسفورد (انگلیس) کتاب‌های زیادی برای بچه‌ها به نام *لوئیس کرول* تالیف کرده است، که به طور گسترده‌ای در تمام جهان پراکنده شده است. «آلیس در سرزمین شگفتی‌ها»، یکی از نوشته‌های اوست. یکی از منتقدان معاصر، کتاب‌هایی را که *کرول* دربارهٔ بچه‌ها نوشته است، به این ترتیب، ارزشیابی می‌کند:


کرول

«*کرول*، با استفاده از اندیشه‌های علمی روز، سیمای ازه‌ای به افسانه‌پردازی داد و گاهی با پیش‌گویی، شکل‌های شگفتی‌آور و با مزه‌ای به چیزهای معمولی می‌داد. به‌جز این، *کرول*، یک شاعر واقعی است و ترانه‌ها و شعرهای او، حتا وقتی که محتوی آن‌ها به کلی بی‌معنی است، بسیار زیبا است».

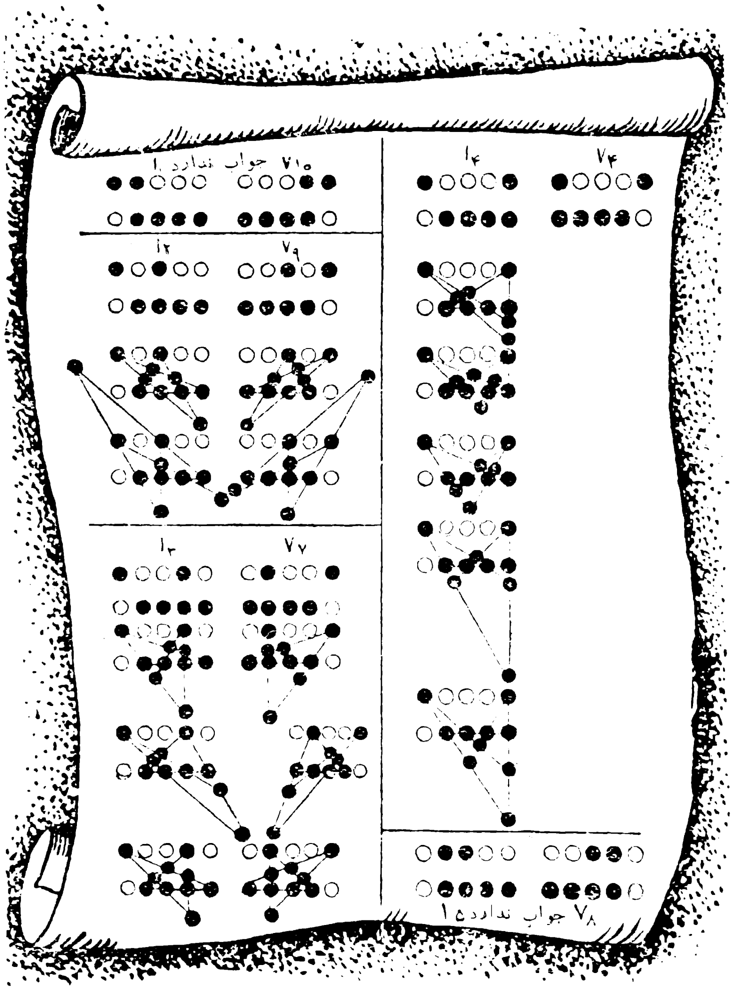
منتقد دیگری، اضافه می‌کند:

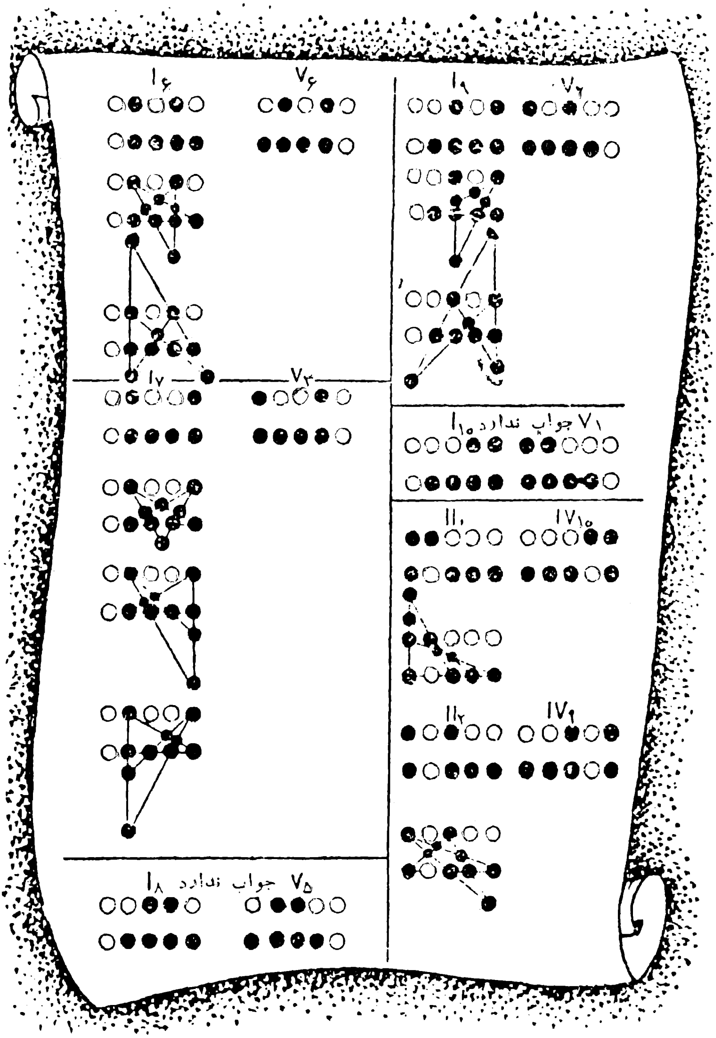
«... هیچ نویسندهٔ انگلیسی دیگر نتوانسته است ملت خود را تا این اندازه بخنداند و برایش شادی بیاورد ...»

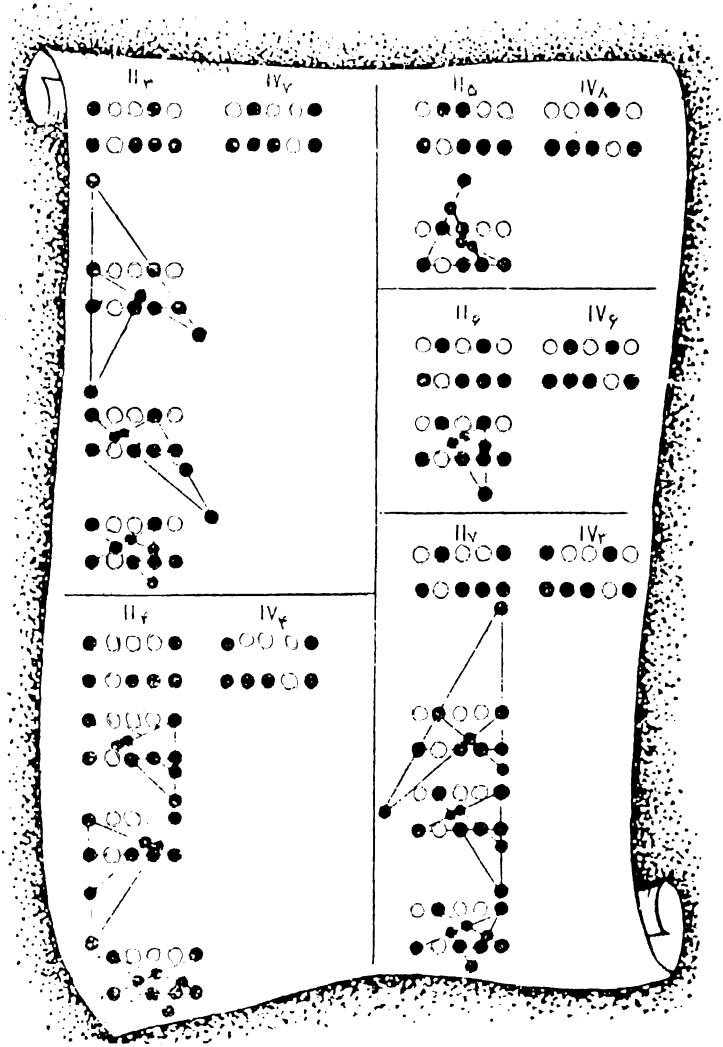
استعداد و تیزهوشی *کرول*، حتا در مساله‌هایی هم که برای دانش‌آموزان درست کرده است، به خوبی دیده می‌شود.

این نویسنده، کتاب‌های آلیس خود را برای *آلیس لیدل*، دختربچهٔ هفت‌ساله نوشت که هنوز در سال ۱۹۳۲ زنده بود و در جشن صدمین سالروز تولد *کرول* شرکت کرد. دست‌نویس کتاب «آلیس در سرزمین شگفتی‌ها» در روزهای سالگرد آن به مبلغی حدود ۱۰۰۰۰۰۰ تومان فروخته شد و این بیشترین مبلغی است که تاکنون برای خرید یک کتاب داده شده است.

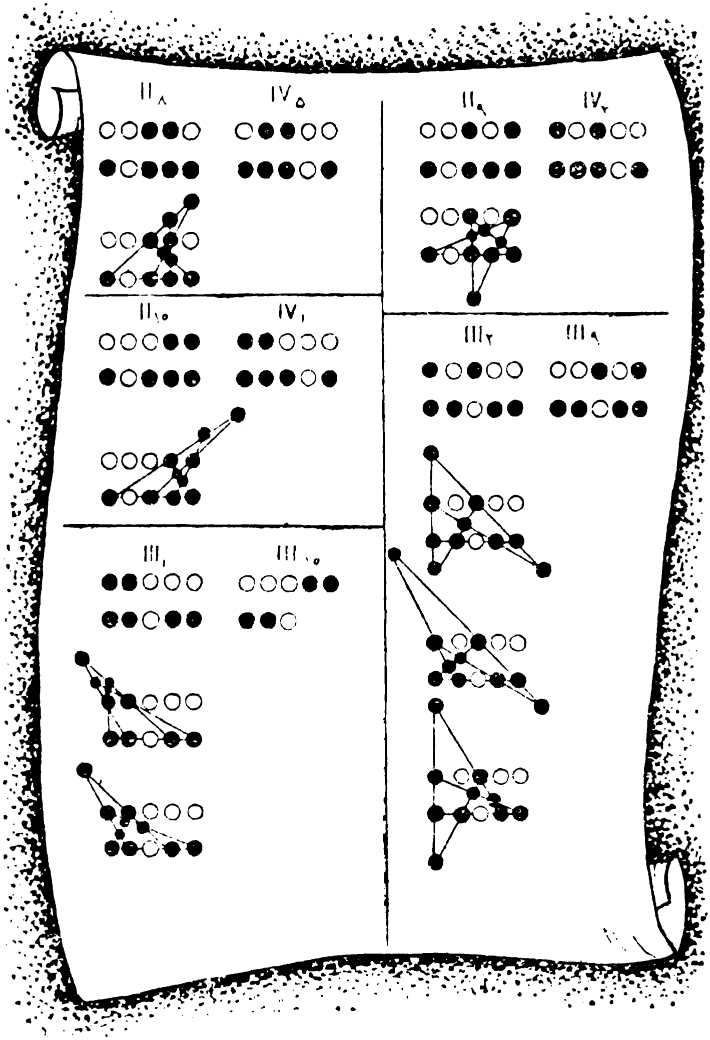
جوابهای مسالهٔ کرول

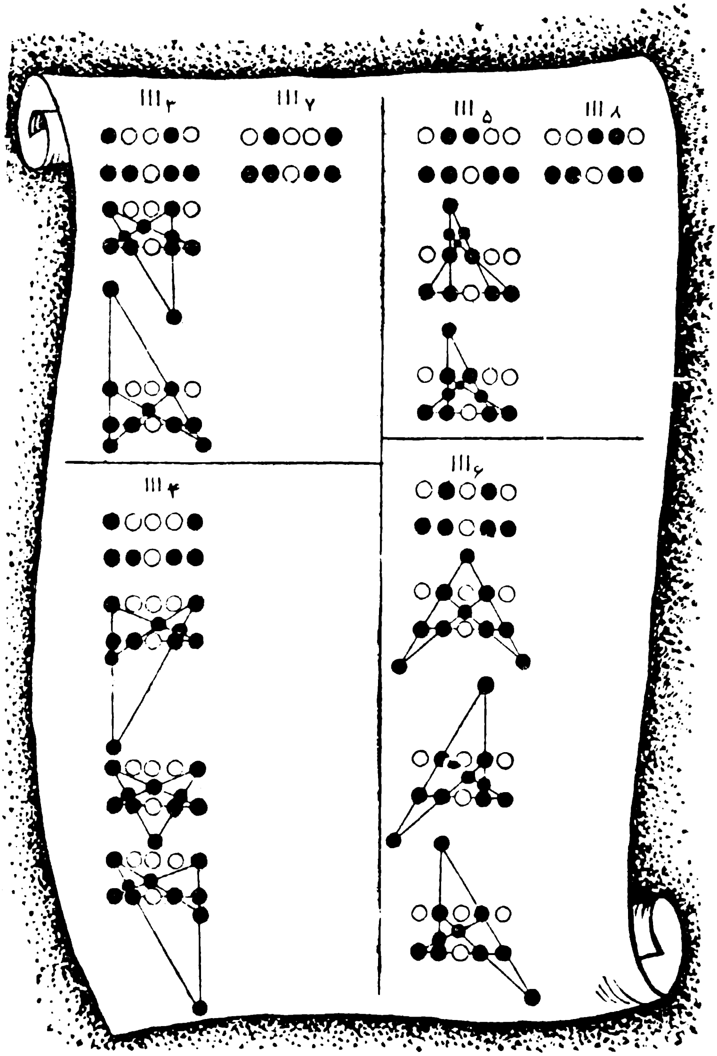



I۶
V۶
I۹
V۲
I۷
V۳
V۱ جواب ندارد I۱۰
II۱
IV۱۰
II۲
IV۹
I۸ جواب ندارد V۵



II۳
IV۲
II۵
IV۸
II۶
IV۶
II۴
IV۴
II۷
IV۳

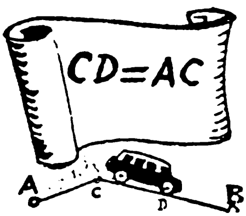

II۸
IV۵
II۹
IV۲
II۱۰
IV۱
III۲
III۹
III۱
III۱۰


III۳
III۷
III۵
III۸
III۴
III۶

درس دهم

حل مساله‌های گوناگونی که شبیه آن‌ها را پیش از این در این کتاب ندیده‌ایم

مساله‌هایی از کتاب «حساب» ماگنیتسکی



در سال ۱۷۰۳، برای نخستین بار یک کتاب درسی ریاضی با قطع بزرگ و در ۶۱۲ صفحه، در مسکو چاپ شد.

این کتاب با عنوانی ۲۰ سطری با حروف بزرگ و در دو رنگ چاپ شده بود و با حروفی خیلی ریز که در عنوان مفصل کتاب گم بود، آگاهی می‌داد که به‌وسیله *لئونتی ماگنیتسکی* نوشته شده است.

این کتاب به دستور پطر اول و به‌وسیلهٔ *لئونتی فیلیپویچ ماگنیتسکی* (۱۶۶۹_۱۷۳۹)، نخستین معلم ریاضیات در روسیه، نوشته شده است. این کتاب، ده‌ها سال، به عنوان تنها کتاب درسی، در کلاس‌ها تدریس می‌شد و با وجودی که نام «حساب» را بر خود دارد، شامل مقدماتی از جبر، مثلثات و هندسه، همچنین کاربرد ریاضیات در دریانوردی هم بود.

قبل از کتاب *ماگنیتسکی*، تنها کتاب چاپی ریاضیات، کتابی بود که در ۱۶۸۲ چاپ شده بود و شامل جدول ضرب همهٔ عددها تا ۱۰۰ × ۱۰۰ بود. روشن است که این کتاب، درسی نبود.

چند مساله را از کتاب «حساب ماگنیتسکی» می‌آوریم.

مسالهٔ ۱. «مردی، اسبش را به ۱۵۶ روبل فروخت؛ ولی، خریدار پشیمان شد و در حالی که اسب را پس می‌داد، گفت: یک اسب به این قیمت گزاف نمی‌ارزد. فروشنده، پیشنهاد دیگری به خریدار کرد و گفت: اگر به نظرت می‌رسد که قیمت اسب گران است، تو تنها میخ‌های نعل‌های اسب را بخر و خود اسب را به عنوان هدیه قبول کن. در هر نعل اسب من، ۶ میخ وجود دارد، بابت میخ اول $\frac{۱}{۴}$ کوپک به من بده، بابت میخ دوم $\frac{۱}{۲}$ کوپک، بابت میخ سوم ۱ کوپک، بابت میخ چهارم ۲ کوپک و به همین ترتیب تامیخ آخر. مرد خریدار که گمان می‌کرد، همهٔ این مبلغ به زحمت به ۱۰ روبل می‌رسد، با پیشنهاد فروشنده موافقت کرد. خریدار، از این بابت چقدر توانسته است چانه بزند؟» (هر روبل برابر ۱۰۰ کوپک است).

حل. خریدار، بنابر فرض مساله باید برای خرید اسب، به‌اندازهٔ

$$\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۲} + ۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \ldots + ۲^{۲۱}$$

کوپک بپردازد. داریم:

$$۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + \ldots + ۲^{۲۱} = ۲^{۲۲} - ۱$$

برای حل این مساله و مساله‌های شبیه آن، می‌توان از جدول مقادیر توان‌های ۲، استفاده کرد، و ما این جدول را در این‌جا می‌آوریم.

۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲
۶	۶۴
۷	۱۲۸
۸	۲۵۶
۹	۵۱۲
۱۰	۱۰۲۴
۱۱	۲۰۴۸
۱۲	۴۰۹۶
۱۳	۸۱۹۲
۱۴	۱۶۳۸۴
۱۵	۳۲۷۶۸
۱۶	۶۵۵۳۶
۱۷	۱۳۱۰۷۲
۱۸	۲۶۲۱۴۴
۱۹	۵۲۴۲۸۸
۲۰	۱۰۴۸۵۷۶
۲۱	۲۰۹۷۱۵۲
۲۲	۴۱۹۴۳۰۴
...	...
۶۴	۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۶

از جدول دیده می‌شود که

$$۲^{۲۲} - ۱ = ۴۱۹۴۳۰۳$$

برای اسب، باید $۴۱۹۴۳۰۳\frac{۳}{۴}$ کوپک به جای پیشنهاد اولیهٔ ۱۵۶ روبل، پرداخت شود. در واقع، خریدار، این‌قدر ضرر کرده است:

$$۴۱۹۴۳۰۳\frac{۳}{۴} - ۱۵۶۰۰ = ۴۱۷۸۷۰۳\frac{۳}{۴} \text{ (کوپک)}$$

به کمک جدول توان‌های دو، که در این‌جا آوردیم، می‌توانیم مسالهٔ مربوط به پاداش درخواستی مخترع افسانه‌ای بازی شطرنج را حل کنیم. او خواسته بود که در خانه‌های صفحهٔ شطرنج به ترتیب ۱، ۲، ۴، ۸، ۱۶، ۳۲ دانهٔ گندم بگذارند و به همین ترتیب، تا خانه‌ها تمام شود. روشن است که تعداد کل دانه‌های گندم چنین است:

$$۱ + ۲ + ۲^{۲} + ۲^{۳} + ۲^{۴} + \ldots + ۲^{۶۳} = ۲^{۶۴} - ۱ =$$
$$= ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵$$

برآورد کرده‌اند که این مقدار گندم برابر است با محصول گندم زمینی که ۲۸ برابر تمام خشکی‌های زمین، مساحت داشته باشد.

مسالهٔ ۲. عددی پیدا کنید که در تقسیم بر ۲ به باقی‌ماندهٔ ۱، در تقسیم بر ۳ به باقی‌ماندهٔ ۲، در تقسیم بر ۴ به باقی‌ماندهٔ ۳ و در تقسیم بر ۵ به باقی‌ماندهٔ ۴، برسد.

حل. عددی را پیدا می‌کنیم که یک واحد از عدد مجهول بزرگتر باشد. این عدد جدید، بر ۲، ۳، ۴ و ۵ بخش‌پذیر است و بنابراین مضرب مشترک آن‌ها است. کوچکترین مضرب مشترک عددهای ۲، ۳، ۴ و ۵ برابر است با ۶۰ و در نتیجه، عدد مجهول، برابر است با ۵۹.

از این‌گونه عددها، به کمک رابطهٔ زیر می‌توان هر چندتا که بخواهیم، پیدا کرد:

$$n = ۶۰k - ۱$$

که در آن به‌جای k می‌توان هر عدد طبیعی دل‌خواه قرار داد.

مسالهٔ ۳. کسی از معلمی پرسید چند دانش‌آموز داری، چون می‌خواهم پسرم را نزد تو بفرستم. معلم، پاسخ داد: اگر من باز هم به همین اندازه که دانش‌آموز دارم، می‌داشتم و اگر نصف و یک‌چهارم آن‌چه که دارم با پسر تو به دانش‌آموزانم اضافه می‌شود، روی هم صد دانش‌آموز داشتم. این معلم چند دانش‌آموز دارد؟

حل. *ماگنیتسکی*، این مساله را به طریق دوفرضی حل می‌کند.

فرض می‌کنیم، تعداد دانش‌آموزان ۲۴ باشد. بنابر شرط مساله، باید به این عدد، خودش، نصف آن و یک‌چهارم آن و سپس یک واحد را اضافه کرد، به دست می‌آید:

$$۲۴ + ۲۴ + ۱۲ + ۶ + ۱ = ۶۷$$

یعنی به اندازهٔ $۳۳ = ۶۷ - ۱۰۰$ نفر کمتر از آن‌چه که مساله گفته است. عدد ۳۳ را، «نخستین انحراف» می‌نامیم.

حالا، برای بار دوم فرض می‌کنیم که تعداد دانش‌آموزان مساوی ۳۲ باشد. در این صورت به دست می‌آید:

$$۳۲ + ۳۲ + ۱۶ + ۸ + ۱ = ۸۹$$

یعنی به اندازهٔ $۱۱ = ۸۹ - ۱۰۰$ نفر کمتر، این «انحراف دوم» است.

در حالتی که هر دو فرض کمتر از آن‌چه مساله داده است، درآید این قاعده داده می‌شود: مقدار فرضی اول را در انحراف دوم و مقدار فرضی دوم

را در انحراف اول ضرب می‌کنیم، حاصل‌ضرب کوچکتر را از حاصل‌ضرب بزرگتر کم می‌کنیم و تفاضلی را که به‌دست می‌آید بر اختلاف دو انحراف، تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{۳۲ \times ۳۳ - ۲۴ \times ۱۱}{۳۳ - ۱۱} = ۳۶$$

تعداد دانش‌آموزان برابر است با ۳۶.

در حالتی هم که هر دو مقدار فرضی بزرگتر از آن‌چه که مساله داده است، درآید، به همین ترتیب باید عمل کرد. مثلاً:

فرض اول: ۵۲.

$$۵۲ + ۵۲ + ۲۶ + ۱۳ + ۱ = ۱۴۴$$

به‌اندازهٔ ۴۴ = ۱۰۰ − ۱۴۴ نفر، بیشتر به‌دست می‌آید. این نخستین انحراف است.

فرض دوم: ۴۰.

$$۴۰ + ۴۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۱ = ۱۱۱$$

به‌اندازهٔ ۱۱ = ۱۰۰ − ۱۱۱ نفر، بیشتر به‌دست می‌آید این دومین انحراف است.

$$\frac{۴۰ \times ۴۴ - ۵۲ \times ۱۱}{۴۴ - ۱۱} = ۳۶$$

ولی، اگر یکی از فرض‌ها بیشتر و دیگری کمتر از آن‌چه مساله گفته است، درآید، باید در محاسبه‌های بالا، به‌جای تفاضل، مجموع را در نظر گرفت. مثلاً:

فرض اول: ۶۰.

$$۶۰ + ۶۰ + ۳۰ + ۱۵ + ۱ = ۱۶۶$$

به اندازهٔ ۶۶ = ۱۰۰ − ۱۶۶ نفر بیشتر به‌دست می‌آید: نخستین انحراف.

فرض دوم: ۲۰.

$$۲۰ + ۲۰ + ۱۰ + ۵ + ۱ = ۵۶$$

به اندازهٔ ۴۴ = ۵۶ − ۱۰۰ نفر کمتر به‌دست می‌آید: دومین انحراف.

$$\frac{۶۰ \times ۴۴ + ۲۰ \times ۶۶}{۶۶ + ۴۴} = ۳۶$$

ماگنیتسکی، دلیل این روش دو فرضی خود را نمی‌آورد، ولی خواننده می‌تواند خود آن را پیدا کند.

مسالهٔ ۴. مردی کارگری را برای یک سال اجیر کرد و وعده داد که ۱۲ روبل و یک قبا به او بدهد. ولی، کارگر بیش از ۷ ماه نتوانست کار کند و درنتیجه ۵ روبل و قبا را بابت مزد خود دریافت کرد. قیمت قبا چقدر است؟

حل. کارگر، باید در هر سال ۱۲ روبل و یک قبا بگیرد، بنابراین مزد هر ماه او یک روبل و $\frac{۱}{۱۲}$ ارزش قبا و در ۷ ماه، ۷ روبل و $\frac{۷}{۱۲}$ ارزش قبا می‌شود. کارگر، به‌جای این مقدار، ۵ روبل و تمام قبا (یعنی $\frac{۱۲}{۱۲}$ آن) را گرفته

است، یعنی ۲ روبل کمتر و در عوض $\frac{۱۲}{۱۲} - \frac{۷}{۱۲} = \frac{۵}{۱۲}$ قبا بیشتر.

به این ترتیب، $\frac{۵}{۱۲}$ قبا، ۲ روبل می‌ارزد و تمام قبا

$$۲ : \frac{۵}{۱۱} = \frac{۲ \times ۱۲}{۵} = ۴\frac{۴}{۵}\ (\text{روبل})$$

مسالهٔ ۵. مردی، یک بتری بزرگ نوشابه را در ۱۴ روز می‌خورد و اگر همسرش هم با او شرکت کند، بتری نوشابه، ۱۰ روزه تمام می‌شود. اگر زن به تنهایی از نوشابه استفاده کند، تا چند روز آن را تمام می‌کند؟

حل. مرد در هر روز $\frac{۱}{۱۴}$ نوشابه بتری و با همسرش $\frac{۱}{۱۰}$ نوشابه بتری را می‌خورد، زن به تنهایی در هر روز به اندازهٔ $\frac{۱}{۳۵} = \frac{۱}{۱۴} - \frac{۱}{۱۰}$ نوشابه بتری را می‌آشامد و بنابراین تمام آن را در ۳۵ روز تمام می‌کند.

مسالهٔ س. آ. راچینسکی. شما احتمالاً، نقاشی ن. پ. باگدانو (۱۸۶۸ ـ ۱۹۴۵) را به نام «محاسبهٔ شفاهی» دیده باشید.


راچینسکی

در این نقاشی، درسی مربوط به حل شفاهی مساله‌ای داده شده است که در مدرسهٔ روستایی از بخش *اسمولنسک*، طرح شده بود. در این مدرسه، در سال‌های ۷۰ سدهٔ گذشته، *سرگی آلکساندروویچ راچینسکی*، تدریس می‌کرد. نقاش، دانش‌آموز همین مدرسه بوده است و در نقاشی خود، *راچینسکی* را تصویر کرده است.

س. آ. *راچینسکی* (۱۸۳۳ـ۱۹۰۲)، نمونه‌ای از مردان با فرهنگ سدهٔ گذشته بود. او، دکتر در علوم طبیعی و استاد گیاه‌شناسی در دانشگاه مسکو بود، آثار *داروین* را به زبان روسی ترجمه کرد و با بسیاری از مردان مشهور زمان خود آشنایی داشت (*لیست* موسیقی‌دان، *لاسال*، سوسیالیست آلمانی، کونوفیشر فیلسوف و دیگران). او در سال ۱۸۶۸، مقام استادی خود را ترک کرد، مدرسه‌ای برای بچه‌های روستایی باز کرد و خود در آن به تدریس

پرداخت. برای این منظور، او می‌بایست از عهدهٔ امتحان مربوط به صلاحیت آموزگاری برآید[1].

در نقاشی باگدانو، نشان داده شده است که چگونه همهٔ دانش‌آموزان به حل مساله، جلب شده‌اند. یادداشت خود راچینسکی هم گواه بر این است که چگونه دانش‌آموزان مدرسهٔ او، علاقه‌مند به حل مساله بودند. «من نتوانستم به تمرینی دربارهٔ محاسبهٔ فکری بپردازم، چیزی که تا آن زمان برای آن‌ها معمول نبود، در حالی که شوق واقعی در آن‌ها به وجود آمده بود . . . گاهی گروه‌های جداگانه و گاهی هم با هم، از من می‌خواستند که به مساله‌های فکری بپردازم . . . یک روز که به هرکدام از شاگردان خود یک مسالهٔ محاسبه‌ای داده بودم، چنان به سرعت جواب‌ها را به من برگرداندند که به زحمت می‌توانستم در نوشتن مساله، به آن‌ها برسم. مسابقهٔ سرعت درگرفته بود.

در لحظه‌هایی که ناامید شده بودم، فکری به خاطرم رسید و تقسیمی بدون باقی‌مانده، درست کردم. شادی بچه‌ها، مرزی نداشت . . .»

حالا به مساله‌ای بپردازیم که بر تخته سیاه نوشته شده بود:

$$\frac{۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ + ۱۳^۲ + ۱۴^۲}{۳۶۵}$$

این عددها به طور تصادفی انتخاب نشده‌اند و نتیجه را هم نباید با عمل‌های عادی به دست آورد. در مساله، مضمون زیبا و ژرفی وجود دارد که حتا دانش‌آموزان کنجکاو و هوشمند هم، با تامل زیاد می‌توانستند به آن پی ببرند.

محاسبه نشان می‌دهد که

$$۱۰^۲ + ۱۱^۲ + ۱۲^۲ = ۳۶۵,\ \ ۱۳^۲ + ۱۴^۲ = ۳۶۵$$

۱ـ راچینسکی در زمان تدریس ریاضی در دبستان، کتاب‌های زیادی نوشته است؛ ۱۰۰۱ مساله برای محاسبه‌های فکری، سرگرمی‌های هندسه و غیره.

به زبان دیگر، مجموع توان‌های دوم سه عدد پشت سر هم (۱۰، ۱۱ و ۱۲) برابر با مجموع توان‌های دوم دو عدد بعدی آن (۱۳ و ۱۴) شده است. به طور طبیعی، پرسشی پیش می‌آید: آیا باز هم می‌توان سه عدد طبیعی پشت سر هم پیدا کرد، به نحوی که مجموع توان‌های دوم آن‌ها، برابر باشد با مجموع توان‌های دوم دو عدد طبیعی بعد از آن‌ها؟

به این پرسش. به سادگی می‌توان پاسخ داد.

فرض می‌کنیم، چنین عددهایی وجود داشته باشد:

$$n^۲ + (n+۱)^۲ + (n+۲)^۲ = (n+۳)^۲ + (n+۴)^۲$$

بعد از باز کردن پرانتزها، به این تساوی می‌رسیم:

$$۳n^۲ + ۶n + ۵ = ۲n^۲ + ۱۴n + ۲۵$$

و یا

$$n^۲ - ۸n - ۲۰ = ۰$$

آیا عدد طبیعی n وجود دارد که در این معادله صدق کند؟ پاسخ به این پرسش را، حتا بدون آگاهی از روش حل معادلهٔ درجه دوم، می‌توان داد.

سه جمله‌ای $n^۲ - ۸n - ۲۰$ را تجزیه می‌کنیم:

$$n^۲ - ۸n - ۲۰ = n^۲ - ۱۰n + ۲n - ۲۰ =$$
$$n(n-۱۰) + ۲(n-۱۰) = (n-۱۰)(n+۲)$$

سه‌جمله‌ای $n^۲ - ۸n - ۲۰$ تنها وقتی برابر صفر می‌شود که یکی از دو عامل $n - ۱۰$ یا $n + ۲$ برابر صفر شود، یعنی $n = ۱۰$ یا $n = -۲$ باشد. به این ترتیب، ریشه‌های معادلهٔ

$$n^۲ - ۸n - ۲۰ = ۰$$

عبارت است از دو عدد ۱۰ و ۲−.

تنها سه عدد طبیعی که مجموع توان‌های دوم آن‌ها، برابر با مجموع توان‌های دوم دو عدد طبیعی بعد از آن باشد، عبارت است از ۱۰، ۱۱ و ۱۲.

به همین ترتیب، می‌توان به این پرسش، پاسخ داد: آیا چهار عدد طبیعی پشت‌سر هم وجود دارد که مجموع توان‌های دوم آن‌ها، برابر باشد با مجموع توان‌های دوم سه عدد بعد از آن؟ به زبان دیگر، آیا عدد طبیعی n وجود دارد، به نحوی که در معادلهٔ زیر صدق کند:

$$n^۲ + (n + ۱)^۲ + (n + ۲)^۲ + (n + ۳)^۲ =$$
$$= (n + ۴)^۲ + (n + ۵)^۲ + (n + ۶)^۲$$

این معادله، بعد از ساده کردن، چنین می‌شود:

$$n^۲ - ۱۸n - ۶۳ = ۰$$

سه‌جمله‌ای $n^۲ - ۱۸n - ۶۳$ را می‌توان به این ترتیب، تجزیه کرد:

$$n^۲ - ۱۸n - ۶۳ = n^۲ - ۲۱n + ۳n - ۶۳ =$$
$$= n(n - ۲۱) + ۳(n - ۲۱) = (n - ۲۱)(n + ۳)$$

از این‌جا دیده می‌شود که ریشه‌های معادلهٔ

$$n^۲ - ۱۸n - ۶۳ = ۰$$

عبارت است از ۲۱ و ۳−. تنها عدد طبیعی که به پرسش ما، پاسخ می‌دهد، عبارت است از ۲۱.

$$۲۱^۲ + ۲۲^۲ + ۲۳^۲ + ۲۴^۲ = ۲۵^۲ + ۲۶^۲ + ۲۷^۲$$

یادآوری. اگر گفت‌وگوی ما تنها بر سر عددهای طبیعی نباشد و هر عدد درست (مثبت، منفی و یا صفر) را بپذیریم، پاسخ دیگری هم برای پرسش خود در هر دو حالت پیدا می‌کنیم که در واقع، ناشی از وجود جواب دوم معادله است:

$$(-۲)^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ = ۱^۲ + ۲^۲,$$
$$(-۳)^۲ + (-۲)^۲ + (-۱)^۲ + ۰^۲ = ۱^۲ + ۲^۲ + ۳^۲$$

مساله‌ای مربوط به حرکت. اتوبوسی بین شهرهای A و B از روی یک بلندی می‌گذرد. اتوبوس در سربالایی، سرعتی برابر ۲۵ کیلومتر در ساعت و در سرازیری ۵۰ کیلومتر در ساعت دارد. اتوبوس از A به B را در $۳\frac{۱}{۲}$ ساعت و از B به A را در ۴ ساعت طی می‌کند.

می‌خواهیم با روش حسابی، فاصلهٔ بین A و B و همچنین فاصلهٔ تا بالاترین نقطهٔ بلندی را پیدا کنیم.

دانش‌آموزی، مساله را به این ترتیب حل کرد:

طرح مسیر بین شهرهای A و B را، رسم می‌کنیم. نقطهٔ C، نقطهٔ گردنه را مشخص می‌کند.

روشن است که فاصلهٔ بین CB، از فاصله AC بزرگتر است، زیرا مسافرت از B به A، بیشتر از مسافرت از A به B، طول می‌کشد.

از نقطهٔ C، فاصلهٔ CD را برابر AC جدا می‌کنیم. اتوبوس، برای مسیر $AC + CD$، وقتی که از A به B می‌رود، و برای مسیر $DC + CA$، وقتی که از B به A می‌رود، به یک اندازه وقت صرف می‌کند. اختلاف بین ۴

ساعت و $۳\frac{۱}{۲}$ ساعت، یعنی $\frac{۱}{۲}$ ساعت مربوط به آن است که وقتی اتوبوس از A به B می‌رود، فاصلهٔ BD را با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت و وقتی که از B به A می‌رود، همین فاصله را با سرعت ۲۵ کیلومتر در ساعت، طی می‌کند. در حالت اول، برای این فاصله به اندازهٔ $\frac{BD}{۵۰}$ ساعت و در برگشتن به اندازهٔ $\frac{BD}{۲۵}$ ساعت، وقت صرف می‌کند. بنابراین، $\frac{BD}{۲۵} - \frac{BD}{۵۰}$، یعنی $\frac{BD}{۵۰}$ ساعت، همان اختلاف زمانی است که اتوبوس، برای عبور از BD، در رفت و برگشت، صرف می‌کند. بنابر فرض مساله، این اختلاف زمان برابر است با $\frac{۱}{۲}$ ساعت، در نتیجه $\frac{BD}{۵۰} = \frac{۱}{۲}$ و یا $BD = ۲۵$ کیلومتر.

سپس، دانش‌آموز، این‌طور استدلال کرد:

اتوبوس، فاصلهٔ D تا A را در ۳ ساعت طی می‌کند، زیرا برای عبور از B به D، یک ساعت وقت لازم است.

فاصلهٔ DC با سرعت ۲۵ کیلومتر در ساعت و فاصلهٔ مساوی آن CA، با سرعت ۵۰ کیلومتر در ساعت، طی می‌شود. بنابراین، سرعت حرکت، $\frac{۵۰ + ۲۵}{۲}$، یعنی $۳۷\frac{۱}{۲}$ کیلومتر در ساعت می‌شود.

از این‌جا می‌توان نتیجه گرفت که اتوبوس در ۳ ساعت، با سرعت متوسط $۳۷\frac{۱}{۲}$ کیلومتر در ساعت، روی‌هم $۱۱۲\frac{۱}{۲}$ کیلومتر طی می‌کند. درنتیجه، فاصلهٔ از A تا B چنین می‌شود:

$$۱۱۲\frac{۱}{۲} + ۲۵ = ۱۳۷\frac{۱}{۲} \text{ (کیلومتر)}$$

چون $AC = CD$، فاصلهٔ AC برابر نصف $۱۱۲\frac{۱}{۲}$ کیلومتر، یعنی $۵۶\frac{۱}{۴}$ کیلومتر و فاصلهٔ CB، برابر $۸۱\frac{۱}{۴}$ کیلومتر می‌شود. ولی، وقتی که دانش‌آموز جواب‌هایی را که به دست آورده بود، آزمایش کرد، دچار شرمندگی شد. اگر فاصلهٔ AC برابر $۵۶\frac{۱}{۴}$ کیلومتر باشد، برای عبور از آن (وقتی که

اتوبوس از A به B می‌رود) با سرعت ساعتی ۲۵ کیلومتر، بیش از ۲ ساعت طول می‌کشد. بعد برای عبور از C به B، با سرعت ساعتی ۵۰ کیلومتر، بیش از $۱\frac{۱}{۲}$ ساعت طول می‌کشد، زیرا فاصلهٔ CB برابر $۸۱\frac{۱}{۴}$ کیلومتر است. به این ترتیب، برخلاف فرض، مسافرت از A به B، بیش از $۳\frac{۱}{۲}$ ساعت، وقت لازم دارد.

به همین مناسبت، دانش‌آموز به جبر رو آورد و جواب را به کمک معادله، به دست آورد. فاصلهٔ AC را به x و فاصله CB را به y، نشان می‌دهیم، باید داشته باشیم:

$$\frac{x}{۲۵} + \frac{y}{۵۰} = \frac{۷}{۲}$$
$$\frac{x}{۵۰} + \frac{y}{۲۵} = ۴$$

و یا

$$۲x + y = ۱۷۵$$
$$x + ۲y = ۲۰۰$$

که از آن‌جا به دست می‌آید:

$$x = ۵۰,\ y = ۷۵$$

و آزمایش هم، نشان می‌دهد که این جواب‌ها، درست است.

اشتباه دانش‌آموز، وقتی که با روش اول حل می‌کرد، در کجا است؟

این اشتباه، در تعبیر نادرسی است که از «سرعت متوسط» کرده است.

سرعت متوسط، عبارت است از عددی که از تقسیم تمام راه بر زمانی که *طول می‌کشد تا این راه طی شود*، به دست می‌آید.

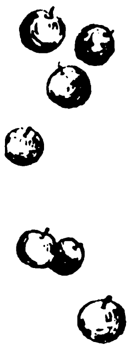
وقتی اتوبوس از کوه بالا می‌رود، سرعتی برابر ۲۵ کیلومتر در ساعت دارد. در مسالهٔ ما، فاصلهٔ AC (سربالایی) با فاصلهٔ CD (سرپایینی) برابر است، ولی سرعت در سرپایینی دو برابر سرعت در سربالایی است. ۲۵ کیلومتر سربالایی در یک ساعت و ۲۵ کیلومتر سرپایینی در $\frac{۱}{۲}$ ساعت طی می‌شود؛ بنابراین ۵۰ کیلومتر را، اتوبوس در $۱\frac{۱}{۲}$ طی می‌کند، یعنی سرعت متوسط اتوبوس به این ترتیب به دست می‌آید:

$$۵۰ : \frac{۳}{۲} = \frac{۱۰۰}{۳} \text{ (کیلومتر در ساعت)}$$

در ۳ ساعت، اتوبوس به اندازهٔ $۳ \times \frac{۱۰۰}{۳}$، یعنی ۱۰۰ کیلومتر راه می‌رود که همان فاصلهٔ $DC + CA$ است. چون این دو فاصله، یکی است، $AC = ۵۰$ کیلومتر و $CD + BD$ مساوی ۷۵ کیلومتر می‌شود.

مساله تقسیم سیب. ماما‌ن، همهٔ سیب‌هایی را که داشت، بین سه فرزندش تقسیم کرد. به اولی نصف تمام سیب‌ها به اضافهٔ نصف یک سیب را داد؛ به دومی نصف باقی‌ماندهٔ سیب‌ها به اضافهٔ نصف یک سیب، و بالاخره به سومی نصف باقی‌ماندهٔ سیب‌ها به اضافهٔ یک نصف سیب. برای این منظور، هیچ‌کدام از سیب‌ها، نصف نشد و سیبی هم برای مامان باقی نماند. به هر فرزند چند سیب رسیده است؟

حل. هم‌تعداد کل‌سیب‌ها وهم سیب‌های‌باقی‌مانده،بعد ازآن‌که‌سهم اولی



و یا دومی داده می‌شود، باید عددی فرد باشد، زیرا، در غیر این‌صورت، تعداد سیب‌هایی که بچه‌ها به‌دست می‌آورند، عددی درست نخواهد شد (بنابر شرط مساله، هیچ‌کدام از سیب‌ها، نصف نشده است). نصف سیب‌های باقی‌ماندهٔ دوم و نصف یک سیب (سهم سومی)، تنها می‌تواند یک سیب باشد؛ و همین یک سیب، باقی‌ماندهٔ دوم است. اگر این باقی‌ماندهٔ دوم برابر ۳ یا ۵ یا عدد فرد دیگری غیر از ۱ باشد، نصف این باقی‌مانده، برابر $۱\frac{۱}{۲}$، $۲\frac{۱}{۲}$ و غیره می‌شود. در این صورت وقتی که $\frac{۱}{۲}$ سیب به آن اضافه کنیم، سهم فرزند سوم برابر ۲ یا ۳ سیب و غیره می‌شود و در نتیجه ۱، ۲ یا بیشتر سیب برای مامان باقی می‌ماند، که با فرض مساله، سازگار نیست. بنابراین، باقی‌ماندهٔ دوم برابر است با ۱ سیب. نصف این باقی‌مانده و به‌اضافهٔ نصف یک سیب، همان ۱ سیب می‌شود که سهم فرزند سوم است.

وقتی که باقی‌ماندهٔ دوم برابر ۱ سیب باشد، این باقی‌مانده وقتی به دست آمده است که به فرزند دوم، نصف یک سیب و نصف باقی‌ماندهٔ اول داده شده است؛ بنابراین، باقی‌ماندهٔ اول مساوی ۳ سیب بوده است و فرزند دوم، نصف این ۳ سیب به اضافه نصف یک سیب، یعنی روی‌هم ۲ سیب را دریافت کرده است.

باقی‌ماندهٔ اول، برابر ۳ سیب است، این ۳ سیب عبارت است از نصف تمام سیب‌ها که از آن‌ها نصف یک سیب هم برداشته شده باشد. یعنی، نصف تمام سیب‌ها برابر $۳\frac{۱}{۲}$ و تمام سیب‌ها برابر ۷ می‌شود.

نصف ۷ سیب به اضافهٔ نصف یک سیب سهم فرزند اول می‌شود:

$$۳\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۴$$

۳ سیب باقی می‌ماند (باقی‌ماندهٔ اول). فرزند دوم، نصف این باقی‌مانده به‌اضافهٔ نصف یک سیب را می‌برد:

$$۱\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۲$$

۱ سیب باقی می‌ماند (باقی‌ماندهٔ دوم)، سهم فرزند سوم، نصف این باقی‌مانده به‌اضافهٔ نصف یک سیب است:

$$\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۲} = ۱$$

سه فرزند روی‌هم ۱ + ۲ + ۴، یعنی ۷ سیب می‌گیرند که شامل تمام سیب‌های مامان است و بنابر شرط مساله، هیچ‌کدام از سیب‌ها هم، تقسیم نشده‌اند.

مساله‌ای دربارهٔ منتقل کردن رقم آخر یک عدد به اول آن. رقم آخر یک عدد برابر است با ۷. این رقم را از آن‌جا برداشته‌ایم و به ابتدای عدد در سمت چپ و جلو بقیهٔ رقم‌ها گذاشته‌ایم. عددی که به‌دست آمده است، ۷ برابر عدد قبلی شده است. عدد اصلی را پیدا کنید.

حل. وقتی رقم آخر عدد را به اول آن، منتقل کنیم، عددی به دست می‌آید که رقم اول آن برابر ۷ و رقم آخر آن برابر ۹ است، زیرا اگر عدد اصلی را که به ۷ ختم شده است، در ۷ ضرب کنیم، عددی به دست می‌آید که رقم سمت راست آن برابر ۹ می‌شود. در نتیجه، همین ۹، رقم دهگان عدد اصلی هم خواهد بود.

به این ترتیب، دو رقم آخر عدد اصلی، برابر است با ۹۷. عدد جدید از این راه به دست می‌آید که عدد اصلی را در ۷ ضرب کنیم، درضمن، رقم‌های حاصل‌ضرب همان رقم‌های عدد اصلی و به همان ردیف‌اند. ضرب باید تا آن‌جا ادامه پیدا کند که در حاصل‌ضرب، رقم ۷ (به عنوان نخستین رقم سمت

چپ) پیدا شود. آخرین دو رقم عدد اصلی برابر ۹۷ و آخرین رقم عدد جدید برابر ۹ است. عدد اصلی را در ۷ ضرب می‌کنیم: $۴۹ = ۷ \times ۷$، ۹ همان رقم دوم عدد اصلی از سمت راست است، ۴ را در ذهن نگه می‌داریم؛ $۶۳ = ۹ \times ۷$، $۶۷ = ۴ + ۶۳$؛ ۷ رقم سوم عدد اصلی است، ۶ را در ذهن نگه می‌داریم $۴۹ = ۷ \times ۷$؛ $۵۵ = ۶ + ۴۹$، ۵ رقم چهارم است و غیره.

هر رقم عدد اصلی، از راه همین ضرب به دست می‌آید: nامین رقم از سمت راست در این عدد، عبارت است از $(n - ۱)$ امین رقم در حاصل‌ضرب به این ترتیب، ۹، که رقم دوم عدد اصلی است، رقم اول عدد جدید خواهد شد. سومین رقم عدد اصلی (یعنی ۷) همان رقم دوم عدد جدید است، چهارمین رقم عدد اصلی (یعنی ۵)، سومین رقم عدد جدید است و غیره. درنتیجه، این عددها به‌دست می‌آید:

عدد اصلی: ۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹۷

عدد جدید: ۷۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹

عدد مجهول را می‌توان با تقسیم عدد دوم بر ۷، پیدا کرد. می‌دانیم که عدد دوم با رقم ۷ شروع و به رقم ۹ ختم می‌شود و درضمن ۷ برابر عدد مجهول است. به‌جز این می‌دانیم، نخستین رقم خارج قسمت (که همان عدد مورد نظر ماست)، دومین رقم مقسوم است و تقسیم باید تا آن‌جا ادامه یابد که باقی‌مانده‌ای برای تقسیم نماند و درضمن رقم آخر خارج‌قسمت هم مساوی ۷ باشد.

به این ترتیب، عمل می‌کنیم:

عدد جدید با ۷ شروع می‌شود بنابراین در تقسیم بر ۷، نخستین رقم خارج قسمت: ۷ : ۷، یعنی ۱ می‌شود. همین ۱ ، دومین رقم از سمت چپ در مقسوم است. وقتی که ۱ را بر ۷ تقسیم کنیم، خارج قسمت برابر ۰

و باقی‌مانده برابر ۱ می‌شود، بنابراین دومین رقم خارج قسمت، و همچنین سومین رقم مقسوم برابر ۰ است. حالا باید ۱۰ را بر ۷ تقسیم کنیم (۱ در ردیف دوم از سمت چپ باقی‌مانده بود و صفر را هم در ردیف سوم مقسوم، به دست آورده بودیم)، خارج قسمت مساوی ۱ و باقی‌مانده مساوی ۳ می‌شود. یعنی، سومین رقم خارج قسمت (که همان عدد مورد نظر است) و چهارمین رقم مقسوم برابر ۱ است، به همین ترتیب، از تقسیم ۳۱ بر ۷، خارج قسمتی برابر ۴ و باقی‌مانده‌ای برابر ۳ به دست می‌آید، چهارمین رقم خارج قسمت و پنجمین رقم مقسوم برابر ۴ است. اگر تقسیم را به همین ترتیب ادامه دهیم تا به باقی‌ماندهٔ صفر و رقم آخر ۷ خارج قسمت برسیم، داریم:

```
۷۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹   | ۷
                          ------------------------
  ۱۰   ۱۹   ۱۶   ۸۸        ۱۰۱۴۴۹۲۷۵۳۶۲۳۱۸۸۴۰۵۷۹۷
    ۳۱   ۵۲   ۲۲   ۲۸
      ۳۴   ۳۷   ۱۳   ۰۴۰
        ۶۴   ۲۵   ۶۱   ۵۵
          ۱   ۴۳   ۵۸   ۶۷
            ۱   ۲   ۴۹
```

برای پیدا کردن عدد، به این ترتیب هم می‌توان استدلال کرد (برای بزرگ‌ترها):

فرض می‌کنیم، عدد مورد نظر، چنین باشد:

$$x = a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \ldots + a_2 \times 10 + 7$$

در این صورت، عدد جدید چنین می‌شود:

$$7x = 7 \times 10^{n-1} + a_n \times 10^{n-2} + a_{n-1} \times 10^{n-3} + \ldots + a_2,$$

$$70x = 7 \times 10^n + a_n \times 10^{n-1} + a_{n-1} \times 10^{n-2} + \ldots + a_2 \times 10 =$$

$$۷ \times ۱۰^n + x - ۷,$$

$$۶۹x = ۷(۱۰^n - ۱) \Rightarrow x = \frac{۷}{۶۹} \cdot (۱۰^n - ۱) = \text{عددی درست}$$

بنابراین داریم:

$$\frac{۱۰^n - ۱}{۶۹} = \frac{\overbrace{۹۹\ldots۹}^{\text{مرتبه}\,n}}{۶۹} = \frac{\overbrace{۳۳\ldots۳}^{\text{مرتبه}\,n}}{۲۳} =$$

$$= ۳ \times \frac{\overbrace{۱۱\ldots۱}^{\text{مرتبه}\,n}}{۲۳} = \text{عددی درست}$$

این می‌ماند که عدد ... ۱۱۱ را بر ۲۳ تقسیم کنیم تا آن‌جا که باقی‌مانده برابر صفر شود. عددی را که به‌دست می‌آید در ۳ × ۷ ضرب می‌کنیم تا عدد مورد نظر به‌دست آید.

نتیجه

ما مساله‌هایی را حل کردیم.

دربارهٔ بسیاری از آن‌ها، در برخورد اول به نظر می‌رسید که با روش‌های معمولی قابل حل نیستند. با وجود این، آن‌ها را حل کردیم و دیدیم، برای این منظور، به نظریه‌های تازه و یا به قانون‌های خاصی نیاز نداشتیم، کافی بود، عمل‌های عادی حساب را بشناسیم و دربارهٔ هر مساله، کمی فکر کنیم.

ماکسیم گورکی، در سال ۱۹۳۴ از بچه‌ها پرسید: چه نوع کتاب‌هایی می‌خواهند داشته باشند؟

از میان چندهزار پاسخی که به این پرسش داده شده بود، گورکی به‌ویژه این پاسخ را که مربوط به یک دختربچهٔ سیزده‌ساله بود، پسندید:

«کتاب‌هایی را می‌خواهیم ... که به‌جای شرح و توصیف، به پیش‌آمدها، پرداخته باشد».

دختربچه با این بیان می‌خواهد بگوید که کتاب باید دربارهٔ آن‌چه در واقع وجود دارد، گفت‌وگو کند، نه دربارهٔ چیزها به طور کلی. کتاب باید جنبهٔ عملی داشته باشد و به ما بگوید که چه کاری را باید انجام دهیم.

ما نخواستیم در این کتاب، از اضافه‌هایی بر آگاهی‌های دبیرستانی گفت‌وگو کنیم، چیزی که پایانی ندارد، بلکه خواستیم به کمک مثال‌ها و «پیش‌آمدها» نشان دهیم که چگونه می‌توان با به کار بردن درست و همراه با اندیشهٔ آگاهی‌های نخستین ریاضی، مساله‌هایی را حل کرد که در برخورد اول، دشوار به نظر می‌رسد.

آلکسی نیکولایه‌ویچ کریلوف، عضو آکادمی، که نام او برای ما آشنا است، در سال ۱۹۴۲ در مجلهٔ «آتش»، که برای بچه‌ها منتشر می‌شود، این‌طور نوشت:

«همه‌چیز را خودتان بیاموزید. گمان مبرید که می‌توانید بدون کار و زحمت، آگاهی‌هایی به‌دست آورید. کوشش کنید، یاد گرفتنی‌ها را تنها به خاطر نسپارید، بلکه ماهیت آن‌ها را بفهمید. و این تنها راهی است که می‌توانید به کمک آن، آن‌چه را یاد گرفته‌اید، تا مدت‌ها فراموش نکنید.

تجربه بیندوزید . . . با اراده باشید، از دل‌سردی نترسید، کاری را که آغاز کرده‌اید، با سرسختی، منظم و بدون توقف، دنبال کنید».

آ. ن. کریلوف

این روش را بپذیرید! شاید بپرسید، برای چه؟

پاسخ خود را، از زبان دوستان دیمکی ـ نویدیمکی بشنوید:

برای این‌که در دریاها سفر کنیم،

برای این‌که به آسمان‌ها پرواز کنیم،

باید خیلی چیزها را بدانیم،

و باید بسیار نیرومند باشیم.

و برای این منظور و به خاطر این هدف،

شما باید به مهم‌ترین دانش‌ها،

یعنی حساب، چیره باشید.

قیمت: ۸۵۰۰ ریال

انتشارات تهران

تهران ـ خ پاسداران، چهارراه دولت، شمارهٔ ۲۶ تلفن: ۲۵۴۵۲۱۹
صندوق پستی ۴۸۷ ـ ۱۹۵۸۵

شابک ۹۶۴ـ۵۶۰۹ـ۱۴ـ۳ ISBN 964 - 5609 - 14 - 3